専門指向の物理学 II

2021 版 (注意：ミスプリあるようです)

Contents

1 はじめに

最近の大学に入学したばかりの学生たちは，物理とは「公式を覚えて問題に応じて適切な公式を選び，それを適用して解を求めるものだ」というようになりがちである．これは大学受験の影響がかなり大きいように思う．それでも物理学法則に魅せられて物理学に関心を寄せる学生は多い．この講義では，将来物理学と関連した専門に進もうとする学生（大学１年生）に，大学らしい物理学の講義に触れる機会を与えることを目的としている．

大学らしい物理学とはなんだろうか．もし、学生が大学院へ進学すると，大学院では最新の物理学の研究にたずさわることになる．そうした最新の物理学への準備が学部の物理学と言えよう．そこでは微分や積分をもとにした数学的な道具を使って物理現象を記述している．こうした道具なしには最新の物理学は理解できない．いわばこの道具は物理学を記述する言葉なのである．この講義ではこうした道具に触れながら物理学を学んでいく．普通の物理学の講義が別にあるので，この講義の目的は，この道具に触れて，その内容を少しでも理解しやすくすることに主眼を置く．

後期は電磁気学を扱う．電磁気学とは、電場と磁場を扱う物理学である。電場と磁場はどのような分布をするのか、時間とともに、どのように変化するのか、などについての物理法則に関する物理学である。電磁気学は日常生活でも幅広く応用されている身近な物理学である。しかし、以下に示すよう

に、場の考え方が必要であり、大学１年生にとってはかなり難しい面もある。そうした点に配慮しながら説明することにする。

電場は電荷によって生まれ、磁場は磁石や電流によって生まれる。これらの関係について、Maxwell は電場と磁場は統一的に扱えることを示した。それは次の Maxwell 方程式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{D} &= \rho &(1)\\
\mathrm{div}\boldsymbol{B} &= 0 &(2)\\
\mathrm{rot}\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &(3)\\
\mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &(4)
\end{aligned}
$$

にまとめられる。各記号の意味はこの授業が進むことによって明らかになってくるので，ここでは省略する。さらに、Maxwell は Maxwell 方程式に電磁波の解があることを示し、その速度は光の速度であることを導いた。ヘルツは 1888 年に、電磁波の存在を実証する実験に成功した。これは物理学の理論が新しい現象を予測し，それが検証された初めての例である。

電場と磁場に由来する力をまとめて電磁相互作用と呼ぶ。自然界の力は、４つあり、それぞれ、重力、電磁相互作用、弱い力、強い力である。電磁相互作用は４つの力の一つである。

電磁気学は、場の概念を学ぶ物理学でもある。電場と磁場は大きさと方向を持つので、ベクトル場と呼ばれ、これを扱うにはベクトル解析を用いる必要がある。ベクトル解析は、流体力学のために発展してきた。それが電磁気学にも使われるようになった。流体の連続性や渦現象を扱うために作られたベクトル解析の道具が電場や磁場に関する法則に使われている．Maxwell 方程式には、ベクトル解析の数学が使われている。学生の皆さん，Maxwell 方程式から、その物理的なイメージを持てるように頑張ってください.

2　電荷と電場

はじめに、電荷と電場の関係から復習しよう。

電荷の間に働く力をクーロン力という。電荷の符号には正と負がある。それは、互いの電荷に比例し、その距離の２乗に反比例する。同じ符号の電荷同士では斥力、異なる符号の電荷同士では引力となる。この関係を適切に示すにはベクトルを用いると便利である。以下ではベクトルを太字で表すことにする。

例えば、電荷 Q_2 による電荷 Q_1 に働く力をベクトルを使って $\boldsymbol{F}_{12}$ と書く

と、それは各電荷の位置も $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ で表して、

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}} \tag{5}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$、$r_{12} = |\boldsymbol{r}_{12}|$ である。ϵ_0 は、真空の誘電率という。この式は、ベクトルを用いているので、電荷 Q_2 による電荷 Q_1 に働く力の大きさと方向を見事に表していることに注意しよう。

レポート

(5) 式について，位置ベクトルとクーロン力のベクトルとの関係を図に示し，電荷 Q_2 と電荷 Q_1 の間に働く力は，これらの電荷が同符合なら反発力、異符号なら引力となることを確かめなさい。

2.1　遠隔作用と近接作用

静電気力に対する二つの見方がある。それは遠隔作用と近接作用である。

クーロン力の考えは二つの電荷に力が働くと考えるので遠隔作用である。近接作用では電荷があると他の電荷に相互作用をおよぼすように空間が変化すると考える。これを電荷によって電場が発生したと考える。電場は正の単位電荷に働く力で定義される。電場を扱うということは近接作用の立場に立っていることになる。Maxwell 方程式は近接作用の立場で電磁気を記述したものであり，電磁波はそうした記述から見出されたのである。よって近接作用は単なる立場からより電磁場の物理的な本質に迫る考えと言える。

具体的に電場を考えてみよう。例えば、$\boldsymbol{r}_2$ にある Q_2 による $\boldsymbol{r}_1$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1)$ は、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{r_{12}^2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}} \tag{6}$$

と表され、$\boldsymbol{r}_1$ の関数になっている。そこに電荷 Q_1 があると，この電荷にはたらく静電気力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = Q_1\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1) \tag{7}$$

と表される。

2.2　電場の重ね合わせの原理

$\boldsymbol{r}_1$ にある Q_1 と $\boldsymbol{r}_2$ にある Q_2 とによる $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、それぞれによる電場の重ね合わせになることが実験から確かめられる。これを電場の重ね合せの原理という。ここで重ね合わせとは二つの電場のベクトル和のことである。つまり、$\boldsymbol{r}_1$ にある Q_1 による電場 $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3} \tag{8}$$

$\boldsymbol{r}_2$ にある Q_2 による電場 $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|^3} \tag{9}$$

と表すと、これら二つの電荷による $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) \tag{10}$$

となる。

多数の電荷が分布している場合も同様に考えることができる。これは，多数の電荷を $Q_i, (i = 1, n)$ とその添字で区別し、それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とすると，$\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は各電荷による電場から

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \tag{11}$$

と表される。

レポート (電気双極子による電場)

x 軸上の $x = a$ に電荷 $q > 0$ と $x = -a$ に電荷 $-q$ があるとき，xy 平面上の電場ベクトルの x 成分と y 成分を求めなさい。電場ベクトルが x 軸と平行となる場所を求めなさい。

ある距離離れて置かれた，大きさが同じで符合が逆の電荷の組を電気双極子と呼ぶ。

3 ガウスの法則

電場と電荷の関係は，電荷が点電荷であればクーロンの法則から導くことができる。それでは，電荷が多数の点電荷の集まりの場合はどのように扱えば良いであろうか。原理的には重ね合わせの原理を使えば良いのであるが，より見通しの良い方法がある。それがガウスの法則である。以下でガウスの法則について説明しよう。

ガウスの法則は、次のような事実から見出された。$\boldsymbol{r}_1$ にある電荷 Q による電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} \tag{12}$$

である。

$$\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$$

は $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$ 方向の単位ベクトルであるので、

$$\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$$

と置いて

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=E_r(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{r})$$

と書くと E_r は

$$E_r(\boldsymbol{r})=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2} \tag{13}$$

となるので，これは距離の２乗に反比例することを示している。E_r は電場の r 成分と呼ぶ。光源と光の強さとの関係でも，光の強さは光源からの距離の２乗に反比例することが知られている。ここで光の強さとは，単位面積あたりを通り抜ける光のエネルギーとしている。光の強さの関係は，次のように理解できる。

光源から単位時間に一定の割合で出たエネルギーが出ているとしよう。また、光源を中心とする球の表面を考えよう。単位時間にこの球を通り抜ける光のエネルギー量は光源から単位時間に出たエネルギー量と等しいはずである。光源から光は等方に広がり、また、この球の面積は球の半径の２乗に比例するので、半径の大きな球ではその単位面積あたりの光のエネルギーは球の面積に反比例して小さくなるはずである。つまり、半径の２乗に半比例することになる。電荷と電場の関係も同様な考え方で理解できるのではと考えられる。

さて、(13) 式を書き換えると

$$4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2E_r(\boldsymbol{r})=\frac{Q}{\epsilon_0} \tag{14}$$

となる。$\boldsymbol{r}$ の終点を $\boldsymbol{r}_1$ を中心とする球の表面上にとると $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|$ が一定となり、$E_r(\boldsymbol{r})$ に半径 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|$ の球の表面積をかけると Q/ϵ_0 となることがわかる。電荷が一つであれば，中心に電荷がある球を考えればいいが，電荷が多数あるとそうはいかない。しかし，光の場合には、多数の光源があるときそれら全てを取り囲む球を考えると、その表面を通り抜けるエネルギーをすべて足しあげれば，それは球の中の全ての光源から出たエネルギーの和となる。電荷と電場の関係でも同じ考えが使えないだろうか。以下それを調べて見る。

多数の電荷を考える代わりに，電荷は一つであるがそれを取り囲む閉曲面が，球ではなく，一般の形成をしている場合を考えよう。この結果は、多数の電荷の場合の取り扱いに応用できるからである。記述を簡単にするため，電荷は原点にあるとする。閉曲面上の $\boldsymbol{r}$ における電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \tag{15}$$

である。もし，電荷が原点にない時には $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i$ で置き換えれば良い。$\boldsymbol{r}_i$ は電荷の位置ベクトルである。$\boldsymbol{r}$ の閉曲面の微小部分 dS は，ほぼ平面とみなせ，それに垂直で閉曲面の外向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする。この外向きというのが恣意的に感じるかもしれないが大切なところである。一般に、閉曲面の形状から考えて $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は一般に平行ではない。そこで，dS を通り抜ける光の量に相当するものとして、次の量を計算しよう。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = E(\boldsymbol{r})dS\cos\theta \tag{16}$$

ここで θ は $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{n}$ とのなす角である。作図をしてみると，この式の妥当性を確認できる。

レポート

(16) 式の妥当性を作図して確かめなさい。

(16) 式は $dS' = dS\cos\theta$ とおくと

$$E(\boldsymbol{r})dS\cos\theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dS' \tag{17}$$

である。ここで dS'/r^2 は原点から $\boldsymbol{n}dS$ を見通した時の立体角となっている。ここで立体角とは，円錐の頂点のように立体的に広がった角度のことで、角度のラディアンによる定義の拡張に対応するものである。すなわち，円弧の角度は，ラディアンで，(弧の長さ)/(半径) である。1 周は 2π である。球の表面の一部の周囲と中心を結んでできる立体角は、(球の表面の一部の面積)/(半径の 2 乗) で定義する。球の表面積の立体角は，4π である。

r と dS' からなる円錐の頂点を原点とし，それを中心とする半径 R の球を考え，この立体角がこの球を切り取る面積を $d\sigma$ とすると，相似の関係から

$$\frac{dS'}{r^2} = \frac{d\sigma}{R^2} \tag{18}$$

の関係がある。よって

$$E(\boldsymbol{r})dS\cos\theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dS' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}d\sigma \tag{19}$$

となる。最後の式の形は R での電場の大きさ $E(R)$ と $d\sigma$ の積になっている。このことから，閉曲面全体 S にわたる積分は，この半径 R の球の全表面積 S_0 についての積分に置き換えることができる。つまり

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_{S_0}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}d\sigma = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_{S_0}d\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{20}$$

が得られる。つまり，任意の Q を取り囲む閉曲面に対して

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{21}$$

が得られるのである。この式は，電荷が原点になくても成り立つことに注意しよう。

閉曲面 S の中に，複数の電荷が分布している場合は，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) \tag{22}$$

に対して

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_S (\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})) \cdot \boldsymbol{n} dS = \sum_{i=1}^{n} (\int_S \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} dS) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{\epsilon_0} \tag{23}$$

となる。これをガウスの法則の積分形という。右辺は閉曲面 S 内の電荷の総量であるので

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \tag{24}$$

と書ける。ここで，V は S で囲まれた体積，ρ は単位体積あたりの電荷である。これを電荷密度と呼ぶ。さらに，電束密度 $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ を導入して

$$\int_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_V \rho dV \tag{25}$$

と表せる。この関係が分かったとして，ではどうやって電場の計算にこの法則が使えるのだろうか。一つの方法は、左辺の計算が簡単になるように閉曲面 S を選ぶのである。電荷が一個の場合にはその電荷を中心とする球の表面を S とするとその表面では $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{n}$ は平行であり、計算は簡単になる。それ以外の場合も電荷分布の特徴に応じた閉曲面を選ぶことができる場合がある。$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{n}$ が平行になるように S を選べば良いのである。

その前に，閉曲面 S が電荷 Q を取り囲まない場合はどうなるか考えてみよう。閉曲面 S の形状はあまり複雑でないとする。（以下はこれから）

4　ガウスの法則の応用

4.1　球の表面の一様電荷分布による電場

球の表面に一様に電荷が分布している時、球の外側の電場は，全電荷が球の中心にあるときの電場と同じになることを示そう。

まず、これをクーロンの法則から求めてみよう。電荷が分布している球の表面を S_0 と呼び、その中心を原点とし，x 軸上の点を考える。S_0 の中心からこの点までの距離を r とする。球 S_0 の表面に一様に分布している電荷の総量を Q とすると、電荷面密度は $\sigma = Q/4\pi R^2$ となる。ここで、R は S_0 の半径である。対称性から電場は x 成分のみがゼロではない。x 成分は図から次のように計算できる。ここで α は x 軸と球面上の点とのなす角である。球面上の微小面積は $Rd\alpha R\sin\alpha d\phi$ である ϕ は x 軸周りの角度である。以下の式では $d\phi$ は積分した。

$$
\begin{aligned}
E_x &= \int_0^\pi \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi R^2\sin\alpha d\alpha}{((r-R\cos\alpha)^2+(R\sin\alpha)^2)^{1.5}}(r-R\cos\alpha) &\quad (26)\\
&= \int_0^\pi \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi R^2\sin\alpha d\alpha}{((r^2-2rR\cos\alpha+R^2)^{1.5}}(r-R\cos\alpha) &\quad (27)
\end{aligned}
$$

ここで，$Z=(r^2-2rR\cos\alpha+R^2)$ とおくと $dZ = 2rR\sin\alpha d\alpha$ であるのでこの式は

$$
\begin{aligned}
E_x &= \int_0^\pi \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{\pi R dZ/r}{Z^{1.5}}(Z/2r+r/2-R^2/2r)\\
&= \int \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\pi R dZ/r(Z^{-0.5}/2r+(r/2-R^2/2r)Z^{-1.5})\\
&= [\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{\pi R}{r}(Z^{0.5}/r-2(r/2-R^2/2r)Z^{-0.5})]_{Z=(r-R)^2}^{Z=(r+R)^2}\\
&= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{\pi R}{r}\left((\frac{(r+R)}{r}-\frac{(r-R^2/r)}{(r+R)})-(\frac{(r-R)}{r}-\frac{(r-R^2/r)}{(r-R)})\right)\\
&= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{\pi}{r}\frac{4R^2}{r}\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} &\quad (28)
\end{aligned}
$$

これは原点に電荷 Q がある時のクーロンの法則の式と同じ。

レポート

上の結果をレポートにしなさい。また，球の中の電場を求めなさい。$r < R$ なので，以上の計算で、定積分の下限で $Z^{0.5} = R - r$ とすればよい。落ち着いてよく考えれば，そう難しくない。この球の表面に一様に電荷が分布した場合に，その内部の電場がゼロになるのはクーロンの法則から導かれる大切な性質である。

次に、ガウスの法則を用いて示してみよう。電荷が分布している球の中心を原点とし、この球の外の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ で表す。上で示したように、

球の表面に一様に電荷が分布しているので $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、電荷分布の対称性から $\boldsymbol{r}$ と平行あるいは反平行である。これから

$$\boldsymbol{E} = E_r \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と表すことができる。ここで $r = |\boldsymbol{r}|$ である。次にガウスの法則を適用する閉曲面 S として、原点を中心とする球を考える。この球の半径 r は、電荷が分布している球よりも大きいとする。この球の表面 S 上の微小面積 dS に垂直で外向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると、明らかに

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

である。よって

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = E_r$$

であるので、ガウスの法則の式の左辺は

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_S E_r(r) dS = E_r(r) \int_S dS = E_r(r) 4\pi r^2$$

となる。これがガウスの法則の右辺

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

と等しい。ここで V は S で囲まれた体積である。こちらは

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

であるので、ガウスの法則の式から

$$E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{29}$$

が得られる。これかた

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{30}$$

が得られ

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{31}$$

が得られる。

$r < R$ の時には球の中には電荷は無いので

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dV = 0$$

であるのでガウスの法則の式から

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{32}$$

が得られる。

レポート

上の結果をレポートにしなさい。

4.2 平板上の一様電荷分布

この平板の外の電場は，平板に垂直で一様である。若干わかりにくいところがあるので，以下に計算例を示す。

ガウスの法則から

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dV$$

電荷分布の対称性から電場 $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E}(z) = E(z)\boldsymbol{e}_z$$

と表される。また，同じく平板の上下では電場は逆方向を向くので，$z = \pm a$ に対して

$$\boldsymbol{E}(-a) = E(-a)\boldsymbol{e}_z = -E(a)\boldsymbol{e}_z$$

は，明らかである。ここで $\boldsymbol{e}_z$ は z 方向の単位ベクトルである。S としては円筒を考え，その軸は z と並行で，上の面は $z = a$ 下の面は $z = -a$ に取る。また円筒の半径は r とする。円筒の上の面を S_1 側面を S_2 下の面を S_3 とすると，

側面上の微小面積のベクトルと電場の方向は直交するので

$$
\begin{aligned}
\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \int_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS + \int_{S_3} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS \\
&= \int_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS + \int_{S_3} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS \\
&= \int_{S_1} E(z) \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n} dS + \int_{S_3} E(z) \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n} dS \\
&= \int_{S_1} E(z) dS + \int_{S_3} (-E(z)) dS \\
&= E(a) \pi r^2 - E(-a) \pi r^2 \\
&= 2\pi r^2 E(a)
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{\pi r^2 \sigma}{\epsilon_0}
$$

である。よってガウス法則から

$$
2\pi r^2 E(a) = \frac{\pi r^2 \sigma}{\epsilon_0}
$$

がえられるので

$$
E(a) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}
$$

となる。電荷分布の対称性から電場 $\boldsymbol{E}$ は

$$
\boldsymbol{E}(z) = E(z) \boldsymbol{e}_z
$$

と表され，同じく平板の上下では電場は逆方向を向くので，$z = \pm a$ に対して

$$
\boldsymbol{E}(-a) = E(-a) \boldsymbol{e}_z = -E(a) \boldsymbol{e}_z
$$

となることをここで確認しておこう。並行平板コンデンサーの間の電場が一様になったのも，平板の間隔が平板の大きさに比べて十分小さいという近似で議論しているからである。

4.3 直線上の一様電荷分布

直線から離れた点での電場の方向は，この直線と垂直で，電場の大きさは，電荷の線密度 λ クーロン/m に比例し，直線からの距離に反比例する。

レポート

上の結果をガウスの法則を使って求め、レポートにしなさい。

比較のために、クーロンの法則を使って電場を求めてみよう。直線状の電荷を z 軸とし、円筒座標系をとる。$z=0$ で＄ r＄における電場を考えると、電荷分布の対称性から電場は r 方向を向いている。この方向の成分を E_r とすると

$$E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r^2+z^2} \frac{r}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

ここで、$\tan\theta = z/r$ とおくと

$$dz = r\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

また、

$$r^2+z^2 = r^2 + r^2\tan^2\theta = r^2\frac{1}{\cos^2\theta}$$

を使うと、

$$E_r = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}\cos\theta d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}[\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

となる。

5　ガウスの法則の微分形

以上のガウスの法則は，積分で表されている。これを微分方程式で表すことが可能である。得られた微分方程式は，空間の各点で電場と電荷がどのように関係しているのかを示している。その内容を理解するのは少し難しいが，まさに近接作用を間近に見る感じがする。また，この微分方程式は，場を扱う微分方程式として，その取り扱いには他の場の方程式と共通な点が多くあり，その意味でも大変重要で興味深い。

5.1　ガウスの法則の微分形の導出

ガウスの法則

$$\int_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \rho dV \tag{33}$$

を V が微小な直方体の場合について考えよう。この直方体は，その中心の座標が (x,y,z) であり，各辺の長さはそれぞれ Δx，Δy，　Δz，各面はそれぞ

れ x 軸，y 軸，z 軸に垂直とする。体積は $\Delta x\Delta y\Delta z$ となる。S はこの立方体の表面積である。この体積は微小なので、右辺は

$$\int_V \rho dV = \rho(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z \tag{34}$$

と表せる。ここで電荷密度はこの微小体積の中心での値を使っていることに注意しよう。

一方，直方体の 6 個の面のうち x 軸に垂直で x 座標が $x-\Delta x/2$ を含む面を A_1，$x+\Delta x/2$ を含む面を A_2 とし，y 軸に垂直で $y-\Delta y/2$ を含む面を B_1，$y+\Delta y/2$ を含む面を B_2 とし，z 軸に垂直で $z-\Delta z/2$ を含む面を C_1，$z+\Delta z/2$ を含む面を C_2 とする。

$$\int_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{35}$$

は、この 6 個の面を使って

$$\begin{aligned}
\int_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS &= \int_{A_1} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS + \int_{A2} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS \\
&+ \int_{B_1} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS + \int_{B_2} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS \\
&+ \int_{C_1} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS + \int_{C_2} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\int_{A_1} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(A_1)\int_{A_1} dS = -D_x(x-\frac{\Delta x}{2},y,z)\Delta y\Delta z$$

ここで，$\boldsymbol{n}(A_1)$ は A_1 での面の方向を表し、$\boldsymbol{n}(A_1) = -\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(A_1) = -D_x$ を使った。また面積分では面の中心 $(x-\Delta x/2, y, z)$ での値を使った。同様に，

$$\int_{A2} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = D_x(x+\frac{\Delta x}{2},y,z)\Delta y\Delta z$$

となる。この二つの式の和は、次のように整理できる。

$$\begin{aligned}
(-D_x(x-\frac{\Delta x}{2},y,z)+D_x(x+\frac{\Delta x}{2},y,z))\Delta y\Delta z &= \frac{(-D_x(x-\frac{\Delta x}{2},y,z)+D_x(x+\frac{\Delta x}{2},y,z))}{\Delta x}\Delta x\Delta y\Delta z \\
&= \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z
\end{aligned}$$

ここで
$$\frac{\partial D_x}{\partial x}$$
は (x,y,z) での値であることに注意しよう。

同様に
$$\int_{B_1} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = -D_y(x,y-\frac{\Delta y}{2},z)\Delta x\Delta z$$
$$\int_{B_2} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = D_y(x,y+\frac{\Delta y}{2},z)\Delta x\Delta z$$
の二つより、右辺どうしの和は
$$\begin{aligned}(-D_y(x,y-\frac{\Delta y}{2},z)+D_y(x,y+\frac{\Delta y}{2},z))\Delta x\Delta z &= \frac{(-D_y(x,y-\frac{\Delta y}{2},z)+D_y(x,y+\frac{\Delta y}{2},z))}{\Delta y}\Delta x\Delta y\Delta z \\ &= \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned}$$
ここで
$$\frac{\partial D_y}{\partial y}$$
は (x,y,z) での値である。

さらに
$$\int_{C_1} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = -D_z(x,y,z-\frac{\Delta z}{2})\Delta x\Delta y$$
$$\int_{C_2} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = D_z(x,y,z+\frac{\Delta z}{2})\Delta x\Delta y$$
の二つより、右辺どうしの和は
$$\begin{aligned}(-D_z(x,y,z-\frac{\Delta z}{2})+D_z(x,y,z+\frac{\Delta z}{2}))\Delta x\Delta y &= (\frac{(-D_z(x,y,z-\frac{\Delta z}{2})+D_z(x,y,z+\frac{\Delta z}{2}))}{\Delta z})\Delta x\Delta y\Delta z \\ &= \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned}$$
ここで
$$\frac{\partial D_z}{\partial z}$$
は (x,y,z) での値である。

これらを足すと
$$\int_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = (\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z})\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (36)$$

が得られる。(34) 式は、

$$(\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z})\Delta x\Delta y\Delta z=\rho(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

となり、ガウスの法則は

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho(x,y,z) \tag{37}$$

と表せる。これをガウスの法則の微分形と呼ぶ。ガウスの法則の微分形は、場の方程式の一つである。おそらく、これは、大学の物理学の講義で出てくる場の方程式としては最初のものであろう。その意味では、少し丁寧にその性質を調べておくのは意味のあることと考える。

レポート

上の方法によるガウスの法則の微分形の導出過程をまとめて、レポートにしなさい。

5.2 ガウスの法則の微分方程式 div$\boldsymbol{D}=0$ の解

ガウスの法則の方程式（以下では微分形とは断らないことにする）の解はどのように求めるのだろうか。ここでは、ある点で $\rho=0$ の場合の解について考えてみよう。

5.2.1 $\boldsymbol{D}$ が z 方向で z にのみよる場合

電荷密度が $\rho=0$ の時、$\boldsymbol{D}$ が z 方向で z にのみよる場合を解いてみよう。$\boldsymbol{D}$ が z 方向で z にのみよるので

$$\boldsymbol{D}=D_z(z)\boldsymbol{e}_z$$

である。

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho(x,y,z)$$

に代入すると

$$\frac{\partial D_z(z)}{\partial z}=0$$

となるので、解は

$$D_z(z)=c$$

ここで、c は任意の定数で、境界条件から決まる。境界条件とは、例えば、ある点での電場の値である。電荷密度がゼロなのに、電場が存在するのは不思

議な感じがするかもしれない。この解は。電荷が存在しない空間に電場が存在するとしたら、$\boldsymbol{D}$ が z 方向で z にのみよる場合には一定の値で一定の方向を持った電場が存在することを示している。この例としては、無限平板に一様に電荷が分布している場合の無限平板の外の電場がある。

5.2.2 軸対称の場合

電場が軸対称な例として、点 (x, y, z) の電場が z 軸からその点に向かう方向の成分のみを持ち、z 軸からの距離 R のみに依存している場合を考えよう。つまり、$R^2 = x^2 + y^2$ である R を使って、$\boldsymbol{D}$ は

$$\boldsymbol{D} = D_R(R)\boldsymbol{e}_R$$

と表せる場合である。ここで

$$\boldsymbol{e}_R = \frac{x}{R}\boldsymbol{e}_x + \frac{y}{R}\boldsymbol{e}_y$$

となるのは明らかである。ガウスの法則の方程式

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$$

で、

$$D_x = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e}_x = D_R(R)\boldsymbol{e}_R \cdot \boldsymbol{e}_x = D_R\frac{x}{R}$$

と

$$D_y = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e}_y = D_R(R)\boldsymbol{e}_R \cdot \boldsymbol{e}_y = D_R\frac{y}{R}$$

を使うと

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{D_R(R)x}{R}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{D_R(R)y}{R}) = 0$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial R^2}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} = 2x$$

また

$$\frac{\partial R^2}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{dR^2}{dR} = 2R\frac{\partial R}{\partial x}$$

なので

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{R}$$

である。よって

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{D_R(R)x}{R}) = \frac{\partial D_R}{\partial x}(\frac{x}{R}) + \frac{D_R(R)}{R} - \frac{D_R(R)x^2}{R^3}$$

となる。また、$D_R = D_R(R)$ なので

$$\frac{\partial D_R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{dD_R}{dR} = \frac{x}{R}\frac{dD_R}{dR}$$

である。y についての微分も同様なので、ガウスの法則の方程式は

$$\frac{x}{R}\frac{dD_R}{dR}(\frac{x}{R}) + \frac{D_R(R)}{R} - \frac{D_R(R)x^2}{R^3} + \frac{y}{R}\frac{dD_R}{dR}(\frac{y}{R}) + \frac{D_R(R)}{R} - \frac{D_R(R)y^2}{R^3} = 0$$

となる。これを、整理すると

$$\frac{dD_R}{dR} + \frac{2D_R(R)}{R} - \frac{D_R(R)}{R} = 0$$

$$\frac{dD_R}{dR} + \frac{D_R(R)}{R} = 0$$

さらにまとめると

$$\frac{1}{R}\frac{d(RD_R)}{dR} = 0$$

解は

$$RD_R = c$$

$$D_R = \frac{c}{R}$$

となる。これは無限直線上の一様電荷による電場と同じ形をしている。

5.2.3 球対称の場合

$\boldsymbol{D}$ が球対称と仮定する。そうすると

$$\boldsymbol{D} = D_r(r)\boldsymbol{e}_r$$

と仮定できる。ここで

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

$$r = |\boldsymbol{r}|$$

である。これから

$$D_x = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e}_x = (D_r(r)\boldsymbol{e}_r) \cdot \boldsymbol{e}_x = D_r(r)\frac{x}{r}$$

同様に

$$D_y = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e}_y = (D_r(r)\boldsymbol{e}_r) \cdot \boldsymbol{e}_y = D_r(r)\frac{y}{r}$$

$$D_z = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e}_z = (D_r(r)\boldsymbol{e}_r) \cdot \boldsymbol{e}_z = D_r(r)\frac{z}{r}$$

であるので

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_r(r)\frac{x}{r}\right)$$

ここで

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial D_r(r)}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{dD_r}{dr} = \frac{x}{r}\frac{dD_r}{dr}$$

であるので

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_r(r)\frac{x}{r}\right) = D_r(r)\frac{1}{r} - D_r(r)\frac{x^2}{r^3} + \frac{dD_r(r)}{dr}\left(\frac{x^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(D_r(r)\frac{y}{r}\right) = D_r(r)\frac{1}{r} - D_r(r)\frac{y^2}{r^3} + \frac{dD_r(r)}{dr}\left(\frac{y^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D_r(r)\frac{z}{r}\right) = D_r(r)\frac{1}{r} - D_r(r)\frac{z^2}{r^3} + \frac{dD_r(r)}{dr}\left(\frac{z^2}{r^2}\right)$$

以上から

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z} = D_r(r)\frac{3}{r}-D_r(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}+\frac{dD_r(r)}{dr}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)$$

これは

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z} = D_r(r)\frac{2}{r}+\frac{dD_r(r)}{dr} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2D_r(r))}{dr}$$

結果は,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2D_r)}{dr} = 0$$

解は

$$r^2D_r = c$$

$$D_r = \frac{c}{r^2}$$

となりよく知られた例と一致する。

5.3 div$\boldsymbol{D} = \rho$ の解

div$\boldsymbol{D} = \rho$ の解の例を紹介する。球の内部に電荷が一様に分布している場合である。この場合、電荷分布の対称性から、電場は球対称であり、この球の中心が原点であると、電場の成分は動径方向成分のみとなる。つまり

$$\boldsymbol{D} = D_r(r)\boldsymbol{e}_r$$

である。ここで r は $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ の大きさであり動径である。電荷密度を ρ とすると

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & (0 < r < a) \\ 0 & (a < r) \end{cases}$$

である。a は球の半径である。この場合 $0 < r < a$ では

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 D_r)}{dr} = \rho_0$$

である。この方程式を解くと、解は

$$D_r = \frac{1}{3}\rho_0 r + \frac{c}{r^2}$$

である。$r = 0$ で $D_r = 0$ と考えられるので $c = 0$ であり、

$$D_r = \frac{1}{3}\rho_0 r$$

となる。電場は半径とともに増大する。

次に $a < r$ の領域を考えると、ガウスの法則は

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 D_r)}{dr} = 0$$

となり、解は

$$D_r = \frac{c}{r^2}$$

である。$r = a$ でこれら二つの解は一致するはずなので

$$D_r = \frac{1}{3}\rho_0 a = \frac{c}{a^2}$$

より

$$c = \frac{1}{3}\rho_0 a^3$$

となる。ここで、この球の中の電荷の総量である

$$Q = \frac{4\pi}{3}\rho_0 a^3$$

を使うと、$a < r$ では

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

となり、原点に電荷 Q があるときの電場についてのクーロンの法則の結果と一致する。

以上をまとめると

$$D_r = \begin{cases} \frac{1}{3}\rho_0 r & (0 < r < a) \\ \frac{1}{3}\frac{\rho_0 a^3}{r^2} & (a < r) \end{cases}$$

5.4 div の物理的イメージ

以上のように、$div\boldsymbol{D} = \rho$ は、場の様子を記述している方程式である。div は divergence と呼ばれ、場のわきだしを表している。この意味は、ガウスの法則の積分形から、微分形を求めた経緯を振り返れば明らかであるはずだが、初めてこれを学ぶ人にとってはイメージすることが難しい。

場の方程式について、その物理的なイメージを持つことは大切であろう。そこで、$div\boldsymbol{D} = \rho$ について、もう少し物理的な考察をしてみよう。微小体積を例にして考えよう。$div\boldsymbol{D} = \rho > 0$ であれば、その微小体積から出て行く $\boldsymbol{D}$ の方が多い。$div\boldsymbol{D} = 0$ は出て行く $\boldsymbol{D}$ と入ってくる $\boldsymbol{D}$ とが同じに割合になっている。これらがわきだしがあったり、なかったりの例ということになる。わきだしがない場合は電気力線は滑らかで連続になる。

$\boldsymbol{D}$ が z 方向で、z のみによる場合、$\boldsymbol{D}$ は一定となることを上で示した。この場合、電気力線は明らかにまっすぐであり、連続である。

軸対象な場の場合、$div\boldsymbol{D} = 0$ を満たす解は、軸から離れるに従って、場が弱くなることを示した。

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(RD_R(R)) = 0$$

より

$$\frac{d}{dR}(D_R(R)) = -\frac{D_R}{R}$$

である。これから

$$dD_R = -\frac{D_R}{R}dR$$

である。図に書くとこの意味はわかりやすい。

5.5 円筒座標系での div

円筒座標系での div について求めてみる。円筒座標系（円柱座標系）では、座標点を表すのに R, ϕ, z を用いる。これらは xyz 座標系と

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = R\cos\phi$$

$$y = R\sin\phi$$

$$z = z$$

の関係がある。ここで、R は z 軸からの距離で、ϕ は原点と (x, y) を結ぶ線と xz 面とのなす角度である。

円柱座標で

$$div\boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

を書き換えよう。ここで

$$\boldsymbol{D} = D_R\boldsymbol{e}_R + D_\phi\boldsymbol{e}_\phi + D_z\boldsymbol{e}_z$$

で、

$$\boldsymbol{e}_R = \frac{x}{R}\boldsymbol{e}_x + \frac{y}{R}\boldsymbol{e}_y$$

となるのは明らかであり

$$\boldsymbol{e}_\phi = -\frac{y}{R}\boldsymbol{e}_x + \frac{x}{R}\boldsymbol{e}_y$$

となるのも $\boldsymbol{e}_\phi$ が $\boldsymbol{e}_R$ と ϕ の値が $\pi/2$ 大きい方向であることからすぐわかる。よって

$$D_x = \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}_x = (D_R\boldsymbol{e}_R + D_\phi\boldsymbol{e}_\phi + D_z\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_x = D_R\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{e}_x + D_\phi\boldsymbol{e}_\phi\cdot\boldsymbol{e}_x = D_R\frac{x}{R} - D_\phi\frac{y}{R}$$

$$D_y = \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}_y = (D_R\boldsymbol{e}_R + D_\phi\boldsymbol{e}_\phi + D_z\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_y = D_R\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{e}_y + D_\phi\boldsymbol{e}_\phi\cdot\boldsymbol{e}_y = D_R\frac{y}{R} + D_\phi\frac{x}{R}$$

ここで、上でやったように

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{R}$$

であり

$$\frac{y}{x} = \tan\phi$$

より両辺を x で偏微分して

$$-\frac{y}{x^2} = \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

よって

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{y\cos^2\phi}{x^2} = -\frac{R\sin\phi\cos^2\phi}{R^2\cos^2\phi} = -\frac{\sin\phi}{R}$$

である。同じく、両辺を y で偏微分して

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\cos^2\phi}{x} = \frac{\cos^2\phi}{R\cos\phi} = \frac{\cos\phi}{R}$$

である。以上から、x についての偏微分は R と ϕ についての偏微分で表せるので D_x を上で求めた関係を使うと

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial D_x}{\partial R}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial D_x}{\partial\phi} = \frac{x}{R}\frac{\partial}{\partial R}(D_R\frac{x}{R}-D_\phi\frac{y}{R})+\frac{-\sin\phi}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_R\frac{x}{R}-D_\phi\frac{y}{R})$$

ここで $x = R\cos\phi$、$y = R\sin\phi$ をつかうと

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial R}(D_R\cos\phi - D_\phi\sin\phi) + \frac{-\sin\phi}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_R\cos\phi - D_\phi\sin\phi)$$

となる。同様に

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial D_y}{\partial R}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial D_y}{\partial\phi} = \frac{y}{R}\frac{\partial}{\partial R}(D_R\frac{y}{R}+D_\phi\frac{x}{R})+\frac{\cos\phi}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_R\frac{y}{R}+D_\phi\frac{x}{R})$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial R}(D_R\sin\phi + D_\phi\cos\phi) + \frac{\cos\phi}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_R\sin\phi + D_\phi\cos\phi)$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} &= (\sin^2\phi + \cos^2\phi)\frac{\partial D_R}{\partial R} + \frac{\sin^2\phi + \cos^2\phi}{R}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} \\ &+ D_R\frac{\sin^2\phi + \cos^2\phi}{R} \\ &= \frac{\partial D_R}{\partial R} + \frac{D_R}{R} + \frac{\partial D_\phi}{R\partial\phi}\end{aligned}$$

となる。これから

$$div\boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial RD_R}{R\partial R} + \frac{\partial D_\phi}{R\partial\phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{38}$$

が得られる。

5.6　ガウスの法則とガウスの定理

6　静電ポテンシャル

静電ポテンシャル ϕ は、単位電荷に働く静電気力、つまり電場 $\boldsymbol{E}$ による位置エネルギーに対応するものである。

例えば、-z 方向を向く、一様な電場 $\boldsymbol{E}$ があれば、一様重力と同じように考えて、z が大きいところほど静電ポテンシャルが大きいと考えられる。これは、$E = |\boldsymbol{E}|$ と書くと $\phi = Ez$ と表せることはすぐわかるであろう。

以上から、静電ポテンシャルは電場と同じ大きさで逆方向の力による仕事として定義でき、次の式で静電ポテンシャルを与えられる。

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$$

ここで $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$ としているのは、電場の方向と、経路の方向が異なる場合を考慮しているからである。また、$\boldsymbol{r}_0$ は静電ポテンシャルの基準点である。積分は経路に沿った積分である。

6.1　静電ポテンシャルを与える積分は経路によらず始点と終点のみによる

ここで、静電ポテンシャルを与える積分

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$$

が経路によらないことを示そう。簡単のため電場は、原点に点電荷 q がある場合を考える。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

ここで、

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

より

$$d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$$

である。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot d\boldsymbol{r}$$

となるので、$\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}$ について考える。内積は成分同士の積の和であるので、

$$\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = xdx + ydy + zdz$$

となる。一方

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=r^2=x^2+y^2+z^2$$

なので

$$d(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=2xdx+2ydy+2zdz$$

である。これから

$$\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}d(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})$$

であることがわかる。よって

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{d(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})}{r}=\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{d(r^2)}{r}$$

よって

$$\phi(\boldsymbol{r})=-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{d(r^2)}{r}$$

$l=r^2$ とおいて積分すると

$$\phi(\boldsymbol{r})=-\int_{l_0}^{l}\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q}{l^{3/2}}dl=\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{l^{1/2}}\right]_{l_0}^{l}=\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\right]_{r_0}^{r}$$

となり電荷からの距離により、経路には依らないことがわかる。

静電ポテンシャルの基準点 $\boldsymbol{r}_0$ を無限遠に取ることがある。この場合

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

となる。

ここでは、点電荷の場合について示しましたが、点電荷の位置が原点にない場合や、複数の電荷が存在している場合に拡張することは容易であるので省略する。

電荷が連続的に分布している場合には、ρdV が微小体積 dV 内の電荷を表している。dV が $\boldsymbol{r}'$ にあるとすると、無限遠を静電ポテンシャルの基準に取った場合、

$$\phi(\boldsymbol{r})=\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')dV}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

となる。

レポート

ある点の静電ポテンシャルが、その座標と静電ポテンシャルの基準の座標とによることについてまとめて、レポートにしなさい。また、点電荷が原点にないときについても、同様のことを行え。

6.2　静電ポテンシャルと電場の関係

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$$

より

$$d\phi = \phi(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

である．ここで

$$\phi(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r}) = d\boldsymbol{r} \cdot \nabla\phi$$

であることを示すことができる．よって

$$d\boldsymbol{r} \cdot \nabla\phi = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

となるので，これから

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{e}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} - \boldsymbol{e}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} - \boldsymbol{e}_z \frac{\partial\phi}{\partial z} = -\nabla\phi = -grad\ \phi$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$$

これは

$$\boldsymbol{E} = -grad\ \phi$$

とも書く。

6.3　ポアッソン方程式とラプラス方程式

ガウスの法則

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

と電場と静電ポテンシャルの関係

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$$

を用いると

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

得られる。

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

これはポアッソン方程式とも呼ばれる。この特解には

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d^3\boldsymbol{r}'$$

がある。

また、

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = 0$$

はラプラス方程式と呼ばれる。ラプラス方程式の解は境界条件に依存する。点電荷による静電ポテンシャルもラプラス方程式の解である。ラプラス方程式の解はとても興味深いのだが、ここでは省略する。

6.3.1　ポアッソン方程式の簡単な解

7　磁場に関するガウスの法則

磁極同士はクーロンの法則に従って、N 極同士なら互いに斥力、異なる磁極同士なら引力を及ぼす。また、磁気単極子が存在しないことから磁場に関しては次の磁場に関するガウスの法則が成り立つ。閉曲面 S として磁石を取り囲むようにとると

$$\int_S \mu_0 \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0 \tag{39}$$

となる。ここで、μ_0 とは真空の透磁率と呼ばれる量であり，この表面積分は磁石を囲む閉曲面上で積分していることに注意しよう．電場の場合、右辺は閉曲面 S で囲まれた体積中の電荷の総量となるが、磁気単極子が見つかっていないので，磁場の場合の電荷に相当するもの (磁荷と呼ばれる）の総和がいつもゼロであるから 0 となるのである。

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

は磁束密度と呼ばれ、これを用いると

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0 \tag{40}$$

がえられる。これから

$$div \boldsymbol{B} = 0 \tag{41}$$

がえられる（(40）式は、閉曲面 S が磁石の片方の極のみを囲う場合にも成り立つ．ただし、S が磁石の内部を通る時には μ_0 は磁石の透磁率 μ で置き換える必要がある。詳しい議論はこのテキストの範囲をこえるので省略する）.

レポート

$$div \boldsymbol{B} = 0$$

が導かれる物理的な筋道についてまとめよ。

8　電流と磁場、アンペールの法則

静止している電荷は電場を作る。運動している電荷は、磁場を発生させる。この章では、この磁場の性質について調べる。

8.1　電流

電流は運動している電荷である。電荷は多くの場合は電子やイオンである。電流 I は、単位時間あたりを導線を通る電荷の量で定義され単位はクーロン/秒である。単位面積当たりの電流の大きさを電流密度 j と呼び、導線の断面積を S とすると

$$j = \frac{I}{S}$$

の関係にある。この電流密度は、もっと一般的に、単位時間当たり単位面積を通り抜ける電気の量として定義できる。この場合は、電流を担う荷電粒子の電荷を q、この粒子の個数密度を n、速度を $\boldsymbol{v}$ とすると

$$\boldsymbol{j} = qn\boldsymbol{v}$$

と表すことができる。これは $\boldsymbol{v}$ の大きさが１秒あたり移動距離であることに注意して、図を書いてみると理解できる。

　ある微小体積内の電荷の量は、電荷が流入したり流出したりすることによって変化するので、電荷密度 ρ について

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\boldsymbol{j} = 0 \tag{42}$$

を満たす。これは、ガウスの法則の微分形を導いた時のやり方を思い起こすと理解できよう。ここで

$$\rho = qn$$

の関係があることに注意しよう。この方程式は、電荷保存の式と呼ばれる。

　この式の物理的なイメージを理解するために、次のような簡単な場合を考えてみよう。$\boldsymbol{j}$ は、x 成分のみを持ち、x 座標に依存している場合である。つまり、

$$\boldsymbol{j} = (j_x(x), 0, 0)$$

となっている時である。この時、$div\boldsymbol{j}$ は

$$div\boldsymbol{j} = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}, 0, 0\right)$$

である。今

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} > 0$$

であるとする。これから、x と $x+dx$ における j_x を比較すると

$$j_x(x) < j_x(x+dx)$$

であることがわかる。$j_x(x)$ は x における x と垂直な単位面積を通り抜ける電荷の量であり、$j_x(x+dx)$ は $x+dx$ における x と垂直な単位面積を通り抜ける電荷の量である。このことは x と $x+dx$ に挟まれた「単位面積当たりの領域」について考えると、$j_x(x)$ で流入し $j_x(x+dx)$ で流出することになる。流入量も流出量も単位時間当たりの量なのでこの差し引きがこの領域内の電荷の単位時間当たりの変化となる。この領域内の電荷は, 電荷密度 ρ を使うと

$$\rho dx$$

となるので、その時間変化は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}dx = -(j_x(x+dx) - j_x(x))$$

となり、これから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{j_x(x+dx) - j_x(x)}{dx} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}$$

となり、電荷保存の式が得られる。

電荷密度 ρ の代わりに質量密度を使うと質量保存の式となる。この時は、上の q は粒子の質量である。このように、(42) 式は、ある物理量の保存を表す式でもあるので、大変大切な式であり、記憶にとどめるよう。

8.2 アンペール力

エルステッドは、電流によって磁針が動かされることを発見した。電流による磁石への力は、いわゆる右ネジの法則に従う。電流によって磁石に力が働くことは、電流によって磁場が生まれることを示している。

さらに、アンペールは、並行電流間の力は 1m あたり

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r_{12}}$$

の力が働くことを見つけた。これをアンペール力と呼ぶ。アンペール力は、磁場によって電流が力を受けることを示している。力の単位はニュートンのとき

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

である。μ_0 を真空の透磁率と呼ぶ。電流 I_1 による磁場を、電流からの距離 r_{12} では

$$H = \frac{I_1}{2\pi r_{12}}$$

と表す。この磁場 H を用いると、アンペール力は

$$F_{12} = \mu_0 H I_2$$

と表せる。磁束密度 $B = \mu_0 H$ を導入すると

$$F_{12} = B I_2$$

である。

8.3 アンペールの法則

無限直線電流 I によって、距離 r の所に

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

の磁場 H が生まれる。磁場の方向は右ねじの法則に従う。これをアンペールの法則という。この場合、

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = I$$

がえられる。ここで、積分は電流 I を取り巻く一周積分を表し、C はその経路を表している。この線積分の経路の方向は、電流 I が右ネジが進む方向を正とする。C が電流を取り囲まないときには

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

となる。

8.3.1 直線電流 I を取り巻く円の経路の場合

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = I$$

を、経路 C が円の場合について説明する。直線電流の方向を z 軸に取り、半径 r の円を xy 平面上に考える。$\boldsymbol{r} = (x, y)$ から円周上の小さな間隔 $d\boldsymbol{r}$ について考えると $d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$ に対して

$$dx = r\cos(\theta + d\theta) - r\cos\theta = -r\sin\theta d\theta$$

$$dy = r\sin(\theta + d\theta) - r\sin\theta = r\cos\theta d\theta$$

となる。ここで r が一定であることを使った. $\boldsymbol{H}$ の大きさは

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

$\boldsymbol{H}$ の方向はこの円周上の $d\boldsymbol{r}$ 方向を向いているので

$$H_x = \frac{I}{2\pi r}(-\sin\theta)$$

$$H_y = \frac{I}{2\pi r}(\cos\theta)$$

である。よってこれらを使うと

$$\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{I}{2\pi r}(-\sin\theta)^2 r d\theta + \frac{I}{2\pi r}(\cos\theta)^2 r d\theta = \frac{I}{2\pi}d\theta$$

となる。これは r によらないので

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} = I$$

となる。

経路 C が円ではない場合には，少し工夫がいるが、説明することができる（省略）。

では、無限直線電流ではない時はどうなるであろうか。実は、その場合にもこの関係は成り立つことが知られている。さらに、電流密度を用いて電流を表すと

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

が成り立つ。ここで S は閉曲線 C で囲まれた面積を表し、ベクトル $\boldsymbol{n}$ は微小面積 dS に垂直な単位ベクトルであり、C の経路に沿った積分が右ネジを回す方向とした時、そのネジの進む方向が $\boldsymbol{n}$ の方向である。

8.4　アンペールの法則の微分形

xy 平面内の微小閉経路（長方形）ABCDA による電流を取り巻く積分について考える．ここで

$$\mathrm{A} = (x,y), \mathrm{B} = (x+dx, y), \mathrm{C} = (x+dx, y+dy), \mathrm{D} = (x, y+dy)$$

$$\begin{aligned}
\int_{ABCDA} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} &= H_x(x+dx/2,y,z)dx + H_y(x+dx,y+dy/2,z)dy + \\
&\quad H_x(x+dx/2,y+dy,z)(-dx) + H_y(x,y+dy/2,z)(-dy) \\
&= (H_x(x+dx/2,y,z) - H_x(x+dx/2,y+dy,z))dx \\
&\quad +(H_y(x+dx,y+dy/2,z) - H_y(x,y+dy/2,z))dy \\
&= -\frac{\partial H_x(x,y,z)}{\partial y}dxdy + \frac{\partial H_y(x,y,z)}{\partial x}dxdy \\
&= (\frac{\partial H_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(x,y,z)}{\partial y})dxdy \\
&= (\mathrm{rot}\boldsymbol{H})_z\, dxdy \\
&= j_z dxdy
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{H} &= \nabla\times\boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

を使った．これから

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{H})_z = j_z$$

が得られる。

これから、任意の方向を向いた微小経路に対して

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{43}$$

が得られる。これは微分方程式になっている。この方程式は分かりにくいが、電流が流れるとその周りに渦を巻くように磁場ができることを表していると、考えれば良い。

レポート

次の磁場とアンペールの法則の微分形と比較しなさい。$\boldsymbol{H}$ の大きさが

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

で

$$H_x = \frac{I}{2\pi r}(-\sin\theta)$$
$$H_y = \frac{I}{2\pi r}(\cos\theta)$$
$$H_z = 0$$

である時、この磁場の $\mathrm{rot}\boldsymbol{H}$ を $r = 0$ 以外の点で求め、アンペールの法則と比較しなさい。

8.5 電流素片による磁場、ビオサバールの法則

無限直線電流と磁場の関係からビオサバールは次のような仮説を考え、電流素片と磁場の関係を求めた。その結果は、後年その正しさが検証されている。無限直線電流を仮想的に小さな部分 $Id\boldsymbol{r}'$ に分け（これを電流素片とよぶ）それによる磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ への寄与は

$$d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{I(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

と考えた。ここで、$d\mathbf{r}'$ は電流の方向にとっている。$\boldsymbol{r}$ は電流素片の位置から磁場を求める位置までのベクトルである．これは無限直線電荷による電場との類似性から考えたという。直線電流以外の場合も、その電流による磁場を、その電流全体にわたって積分して

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \int \frac{1}{4\pi}\frac{I(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

と求めることができる。これをビオサバールの法則という．任意の電流について磁場を求めることができる。ビサバールの法則の正しさは、現在確かめられており、また、アンペールの法則から導くことができることも示されている。

もう少し正確にビオサバールの式を書くと

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \int \frac{1}{4\pi}\frac{I(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

である．$\boldsymbol{r}'$ が電流素片の位置ベクトルである．

8.6 直線電流とのアナロジー

ビオとサバールは以下のような類似性からビオ・サバールの法則を思いついたとされている。

直線電流 I による磁場の大きさ H は電流からの距離が r の時

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

となる．この r に反比例する結果は直線上に一様に単位長さ当たり λ の電荷が分布している場合の電場の大きさ E

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

と r 依存性が同じになっている．この電場は，直線の一部 $d\boldsymbol{r}'$ に分布している電荷 $\lambda d\boldsymbol{r}'$ による $\boldsymbol{r}$ の位置の電場の直線に対して垂直な成分への寄与 $dE(\boldsymbol{r})$ がクーロンの法則を使って

$$dE(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda dr' \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}$$

となることから与えられる．ここで θ は $d\boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ のなす角である．

そこで電荷の場合と同じように電流と磁場の場合も，似た法則が成り立つとすると

$$dH(\boldsymbol{r}) = \frac{I dr' \sin\theta}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}$$

ここで，θ は $d\boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ のなす角であり，$\boldsymbol{H}$ の方向まで考えると

$$d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{I d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

と考えられる．ここで I は $d\boldsymbol{r}'$ 方向に流れているとしている。これから

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \int_C \frac{I d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

ここで C は電流の沿った経路である。これがビオ-サバールの法則である．

8.7 アンペールの法則とビオ・サバールの法則との関係

初めてこの辺りを勉強すると電流とそれによって作られる磁場との関係を表す法則が二つあることに戸惑うと思います。アンペールの法則とビオ・サバールの法則は、電流とそれによって作られる磁場との関係について同じ内容であることを示すことができます。

8.8 アンペールの法則と電荷の保存則との関係

$$\mathrm{rot} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

9 電磁誘導の法則

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

10 電磁波の導出

真空中のマックスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{44}$$

をとく。そのために真空中のマックスウェル方程式から、次のようにして $\boldsymbol{E}$ のみの方程式を求めよう。

次に、

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i(kx-\omega t)} \tag{45}$$

を仮定してこの方程式に代入する。ここで、k, ω は定数であり、$\boldsymbol{E}_0$ は z 方向を向いているとする。これは波の位相 $kx - \omega t$ を一定値 c_0 と置くと

$$kx - \omega t = c_0$$

これより

$$x = \frac{c_0}{k} + \frac{\omega}{k} t$$

が得られ、この式は、波の位相が c_0 である場所が t とともに波の速度 ω/k で伝わっていくことを示している。

(45) 式を真空中のマックスウェル方程式に代入すると

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \tag{46}$$

が得られる。左辺は波の位相速度の 2 乗である。つまり真空中のマックスウェル方程式を満足する波動関数の解があることがわかる。その位相速度は

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

であることから、光の速度と一致している。

11　まとめ

電磁場の法則には、あと電磁誘導の法則が残っているが、時間の関係でこの授業はここまでである。アンペールの法則と、電荷の保存則との比較から、アンペールの法則の修正が必要なこと、４本のマックスウェル方程式から、電場と磁場の波動方程式が導かれ、それが電磁波の発見につながったこと、電磁波の速度は理論的に光の速度であることを示すことができるなど、興味深い話題はあるが、１年生にとっては、やはり高級なので、講義では割愛した。

この授業では、電磁気を理解するのに必要な基本的な考え方について触れてきた。その中で、少し高級な「ベクトル場を扱う数学」（ツール）を紹介した。みたこともない記号の持つ意味が理解できるように、この講義では数学的な厳密さよりも、「学生が具体的な例を通して物理的な理解が可能なようになるように」と考え、講義をすすめたが、それが学生諸君に参考になれば幸いである。最後に、このテキストは、わかりにくい表現があったり、ミスタイプが残っていると思いますのでその点お詫びします。