専門志向者の物理学I-力学

https://astro3.sci.hokudai.ac.jp/~habe/phys-lectures/

September 26, 2021

Contents

1 本講義の目的

専門志向者のための物理学 I(力学) の目的

- 物理学を専門的に使う学部学科を希望する人のための物理学の入門講義として力学を題材

- 微分、積分、微分方程式、ベクトルなどを１年の通常の物理学講義よりも少し本格的に使用する

- ベクトルの微分、基本ベクトルを使う
- 運動量、角運動量、ポテンシャルエネルギー、運動方程式，力学的エネルギー保存則などをより深く理解する
- デカルト座標ではない座標系をもちいることで、対象としている系の物理学的理解が深まる。このことを、2 次元極座標の例について理解する
- 運動方程式の解法をある程度深く理解する
- 注意：このテキストには講義でふれない部分も書いてある

参考図書　岩波書店　力学　小出昭一郎

1.1　大学の物理学は高校とどう違うのか

高校の物理では、微分や積分を使わなかった。大学では物理法則の正確な記述のために微分や積分を使う。

1.1.1　なぜ、物理学で微分や積分を使うのか

物理法則を正確に記述するために微分や積分が必要である。具体的には、運動の記述には、座標が必要、運動法則の記述には微分が必要、運動法則から運動の軌道を求めるには積分が必要、などである。

2　運動学：速度、加速度

運動学：速度や加速度が与えられているとき、物体の軌道を求める事。運動の原因をとわない。これに対して、運動をその原因から考えることを力学という。

運動学の例：一様な重力中を自由落下する物体の運動や物体の放物線運動などは運動学で理解できる。

2.1　運動記述、座標系

物体の運動の記述には座標系が必要。哲学者のデカルトが考えたデカルト座標（xyz 座標系）が基本である。xyz 座標系の目盛りの単位には m（メートル）を用いる。

物体の位置を物体の x, y, z 座標で表す。物体の運動の記述は、物体の位置座標 (x, y, z) が時間を共にどのように変化するかを表すこと、つまり、物体の位置座標を時間の関数で表すことである。

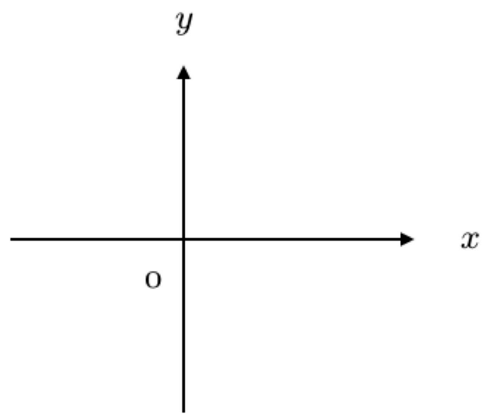

Figure 1: デカルト座標系

2.2 速度と座標の時間微分

物体の速度は、単位時間当たりの物体の座標の変化である。これは，物体の軌道を座標で表し，その座標が時間の関数として表せる場合，その座標を時間微分して求められる。これは次のようにして理解できる。

物体が x 軸上を動く場合を考える。十分小さな時間間隔 dt の間に，物体が dx 進むとき、dx は物体の速度 v_x を使って

$$dx = v_x dt \tag{1}$$

の関係にある。これから

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \tag{2}$$

となる。ここで十分小さな時間とは、速度がほとんど一定とみなせるような小さな時間間隔のことである。ここで、$\dot{x}$ は x の時間微分を表しており、$\dot{x} = dx/dt$ である。

例として、物体の位置が次の xy 座標で表されるとき，この物体の軌道の性質や、速度、加速度を調べてみよう。

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases} \tag{3}$$

ここで、R, ω は定数で、t は時間である。式 (3) は物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の各成分であり、

$$\boldsymbol{r} = (x, y)$$

である。ここでベクトルを表すのに，太字 $\boldsymbol{r}$ を使っている。このベクトル $\boldsymbol{r}$ 大きさの 2 乗は

$$r^2 = x^2 + y^2 = (R\cos\omega t)^2 + (R\sin\omega t)^2 = R^2$$

と一定であり、(3) 式は半径 R の円の上を動く質点の軌道を表している。これを円運動という。位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ のようにベクトルの始点が固定されているベクトルを束縛ベクトと呼ぶ。

2.2.1 速度ベクトル

次に、式 (2) から、式 (3) で示されたれる位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の各成分を時間微分すると速度ベクトルの成分が求められることがわかる。みなさんは、三角関数の微分はできるだろうか。

練習問題：三角関数の微分

sin 関数と cos 関数の微分について説明しなさい。

(3) 式の x, y を時間微分すると

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -R\omega\sin\omega t = R\omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \frac{dy}{dt} = R\omega\cos\omega t = R\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \tag{4}$$

がえられる。これらは、それぞれ速度の x 成分、y 成分になっている。速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y) = (\dot{x}, \dot{y})$$

であり、その大きさ v は

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\omega$$

これから、R と ω は一定と仮定したので v は一定である。これから、(3) 式は等速円運動を表していることがわかる。

練習問題：円軌道での速度ベクトルと位置ベクトルの直交性

上で与えられた速度ベクトルと位置ベクトルとの内積をとり、これらが互いに直交している事を示せ。

さらに、この軌道上の点 (x, y) に質点があるときの速度ベクトルは、その点での軌道に接する接ベクトルと平行である事が示せる。

点 (x, y) から dt の間の質点の移動 (dx, dy) は dt が十分小さいと，この軌道の接ベクトルであることは明らかである。つまり

$$(dx, dy) = (v_x dt, v_y dt)$$

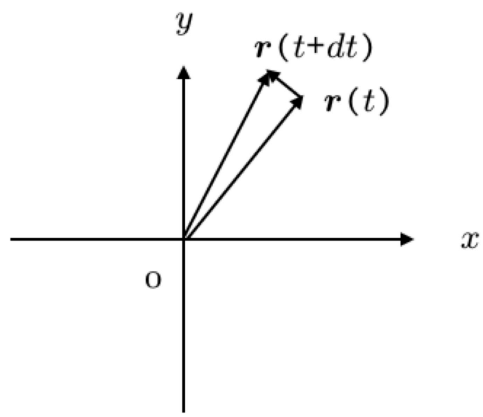

Figure 2: 位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と $\boldsymbol{r}(t+dt)$

であるから、この軌道の接ベクトルは速度ベクトルと平行であることがわかる。単位接ベクトルを $\boldsymbol{e}_t$ で表すと（太字はベクトルを表していることに注意しよう）軌道の接ベクトルは速度ベクトルと平行であるから

$$\boldsymbol{e}_t = (v_x/v, v_y/v) = \frac{\boldsymbol{v}}{v} \tag{5}$$

(5) 式は、$\boldsymbol{v}$ 方向の単位ベクトルを求めるために、$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}$ の大きさである v で割っている。(5) 式から

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_t$$

と表せる。以上の議論から、(5) 式は一般の軌道に対して成り立つことに注意しよう。

練習問題：次のベクトルは単位ベクトルであることを示せ

$$\boldsymbol{e}_t = (v_x/v, v_y/v)$$

2.2.2 加速度

加速度は、単位時間当たりの速度の変化である。よって

$$dv_x = a_x dt$$

の関係にある。よって，これから

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

が得られ，加速度は速度の時間微分で与えられることがわかる。等速円運動の加速度ベクトルの成分は, 式 (4) より

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\omega^2 \cos\omega t = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -R\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 y \end{cases} \tag{6}$$

加速度は $\boldsymbol{r}$ と比較すると、$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}$ となっており、$-\boldsymbol{r}$ 方向を向いている。つまり等速円運動では，加速度ベクトルはいつも円軌道の中心方向を向いていることがわかる。また、加速度ベクトルは、速度ベクトルと直交していることも示せる。

練習問題：

等速円運動では，加速度ベクトルと速度ベクトルは直交していることを示せ

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = 0$$

2.2.3 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$

速度ベクトルは $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_t$ と書けることから、加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ は速度ベクトルを時間微分することで

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{e}_t) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t + v\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt} \tag{7}$$

のように表せる。ここで,

$$\boldsymbol{e}_t \cdot \boldsymbol{e}_t = 1$$

の両辺の微分すると

$$\boldsymbol{e}_t \cdot \frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt} = 0$$

となるので，$\boldsymbol{e}_t$ が時間変化している時は、$\boldsymbol{e}_t$ と $\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt}$ は直交していることがわかる。

練習問題：次の関係を $\boldsymbol{e}_t$ の成分を計算して示せ

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_t \cdot \boldsymbol{e}_t) = 2\boldsymbol{e}_t \cdot \frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt} = 0$$

式 (7) より加速度の軌道接線方向成分は $\frac{dv}{dt}$ であり，$\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt}$ の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_n$ で表すと（主法線単位ベクトルという），主法線方向成分は $v|\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt}|$ である。$|\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt}|$ は 1 とは限らないことに注意しよう。

等速円運動の場合、$\frac{dv}{dt}=0$ なので，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交しており，

$$\boldsymbol{a}=v\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt}$$

となる。この場合、$d\boldsymbol{e}_t/dt$ の x,y 成分は、式 (4) より

$$\begin{cases}(d\boldsymbol{e}_t/dt)_x=-\omega\cos\omega t\\(d\boldsymbol{e}_t/dt)_y=-\omega\sin\omega t\end{cases}$$

となり、大きさは $\omega=v/R$ で方向は $-\boldsymbol{r}$ 方向である。

一般の軌道の場合、加速度の主法線方向成分 a_n とすると，それは式 (7) より

$$a_n=v|\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt}|$$

である。軌道の単位接ベクトルの時間変化の大きさが

$$|d\boldsymbol{e}_t/dt|=v/R$$

の関係を満たす R を、この軌道の曲率半径と呼ぶ。R の逆数を曲率という。

$$R=v/|d\boldsymbol{e}_t/dt|=1/\left(\frac{1}{v}|\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt}|\right)$$

と書けるので，最後の右辺の分母が曲率である。vdt は dt の間に進む距離になっている。また，軌道の曲率半径は、a_n を使って

$$R=v^2/a_n$$

と関係することも示せる。

2.3　2次元極座標系による運動の記述

2 次元極座標 (r,θ) は、図のように定義して位置座標を (r,θ) で指定する。このため、2 次元極座標の座標軸 (r 軸や θ 軸）の方向は各点で異なっている。ここでは，この極座標で運動を記述する方法を学ぶ。

デカルト座標と極座標の関係は

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}\tag{8}$$

である。ここで、$r=\sqrt{x^2+y^2}$ の関係がある。r と θ で物体の位置を表す時、これらは時間とともに変化する。つまり時間の関数である。式 (8) から，速度の x 成分と y 成分を求めよう。

$$\begin{cases} v_x = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ v_y = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \tag{9}$$

ここで r と θ は，ともに時間に依存することを使った。

これから $\dot{r}$ と $r\dot{\theta}$ について解くことができる。そのために，それぞれに $\sin\theta$ あるいは $\cos\theta$ をかけて足したり引いたりすればいいので

$$\dot{r} = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta \tag{10}$$

作図してみると，これは r 方向への速度の射影になっている。同様に

$$r\dot{\theta} = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta \tag{11}$$

これは r 方向と直交する方向への速度の射影になっている。この直交する方向を θ 方向と呼ぶ。これらから，$\dot{r}$ は r 方向の速度成分であり，$r\dot{\theta}$ はそれと直交する方向の速度成分である。前者は，速度の r 成分と呼び，後者は，θ が変化することによる速度なので，速度の θ 成分と呼ぼう。それぞれの方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ とすると，速度ベクトルは

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{12}$$

と書けそうである。これに対して xy 軸での単位ベクトル $\mathbf{e_x}$、$\mathbf{e_y}$ を使うと

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y \tag{13}$$

である。

では $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ の xy 座標系での成分はどのようになるであろうか。

$$\boldsymbol{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{14}$$

は明らかであろう。また，$\boldsymbol{e}_\theta$ は $\boldsymbol{e}_r$ と直交する方向にあることから，$\boldsymbol{e}_r$ よりも θ が $\pi/2$ 大きい方向とすると

$$\boldsymbol{e}_\theta = (\cos(\theta+\pi/2), \sin(\theta+\pi/2)) = (-\sin\theta, \cos\theta) \tag{15}$$

となる。$\boldsymbol{e}_r$ との内積をとるとゼロになるので、互いに直交している。

式 (14) と式 (15) であれば、(12) 式に x 方向の単位ベクトル $\mathbf{e_x}$ を内積させて $\boldsymbol{v}$ の x 成分を計算してみると

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_\theta = \dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}(-\sin\theta) = v_x$$

となり、(9) 式の第一式と一致する。同様に

$$\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_\theta = -\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = v_y$$

と一致する。まあ，これでいいのだけれど，もう少し系統的に計算で示すことはできないだろうか。そのために，極座標における微小変位を調べてみよう。

以下のようにして $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ を求めてみよう。十分小さな時間間隔 dt の間に、物体は移動し、それによる極座標の微小な変化は、それぞれ

$$(dr, d\theta)$$

とする。これを同時に考えるのは，難しいので別々に考えよう。

まず，$d\theta = 0$ の時を考えよう。その時の移動距離は

$$dr$$

である。また，$dr = 0$ なら移動距離は

$$rd\theta$$

である。これは，幾何学的にあきらかであるが，次のように計算で求められる。

$d\theta = 0$、つまり、r は変化するが θ は変化しないとすると、式 (8) より

$$\begin{cases} dx = dr\cos\theta \\ dy = dr\sin\theta \end{cases} \tag{16}$$

である。これから，

$$(dx^2 + dy^2)^{1/2} = dr$$

となっている。

次に，$d\theta$ については，θ は変化するが r は変化しないとして、同じく式 (8) より

$$\begin{cases} dx = -rd\theta\sin\theta \\ dy = rd\theta\cos\theta \end{cases} \tag{17}$$

であるので，

$$(dx^2 + dy^2)^{1/2} = rd\theta$$

となり，それぞれの移動距離を計算で求めることができた。

次に、$d\theta = 0$ の時の移動の方向、つまり r 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ について，その x 成分と y 成分 e_{rx}，e_{ry} を調べてみよう。式 (16) より，x 成分は

$$e_{rx} = \cos\theta$$

y 成分は

$$e_{ry} = \sin\theta$$

である。これは $\boldsymbol{r}$ の方向と平行であるのは明らかである。

次に、$dr = 0$ の時の移動の方向の単位ベクトルを、$\boldsymbol{e}_\theta$ として，その x 成分と y 成分，$e_{\theta x}$ と $e_{\theta y}$ は式 (17) より

$$\begin{cases} e_{\theta x} = -\sin\theta \\ e_{ry} = \cos\theta \end{cases} \tag{18}$$

となる。この移動方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ は、互いに直交しているのは内積から確かめることができる。

以上から，これら二つの変位が同時に起こるときには，それをベクトルで表すと

$$d\boldsymbol{r} = dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

となる。

この変位が，時間 dt の間に起こる場合は、極座標 (r, θ) の各方向の速度成分を (v_r, v_θ) と表すと

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \tag{19}$$

となるのも明らかであろう。極座標 (r, θ) の単位ベクトルを使うと

$$\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{20}$$

となるのは明らかだろう。上で，直感的に求めた関係が，系統的な計算によって得られたことになる。以上わかりにくいが落ち着いてやってみると納得できると思う.

次に，位置ベクトルと $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ とし，速度ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

は

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\boldsymbol{e}_r) = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}$$

となる。上の式 (20) と比較すると

$$\begin{cases} v_r = \frac{dr}{dt} \\ v_\theta\boldsymbol{e}_\theta = r\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} \end{cases} \tag{21}$$

である。一番目の式は明らかであるが，この二番目の式は，どのように示せるのだろうか。また，加速度ベクトルは

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}_r \boldsymbol{e}_r + v_r \dot{\boldsymbol{e}}_r + \dot{v}_\theta \boldsymbol{e}_\theta + v_\theta \dot{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{22}$$

となる。各単位ベクトルは粒子の位置とともに $\theta(t)$ が時間変化することを考慮しなければいけない。

r 方向の単位ベクトルの成分は xy 座標系では

$$\boldsymbol{e}_r = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \tag{23}$$

また，$\boldsymbol{e}_\theta$ は

$$\boldsymbol{e}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \tag{24}$$

である。　θ が時間に依存することから

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}_r &= (-\dot{\theta}\sin(\theta), \dot{\theta}\cos(\theta)) \\ &= \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}_\theta &= (-\dot{\theta}\cos(\theta), -\dot{\theta}\sin(\theta)) \\ &= -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r \end{aligned} \tag{26}$$

という関係にある。

これから

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r \\ &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r(\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) \end{aligned} \tag{27}$$

さらに

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{v}} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) \\ &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta \end{aligned} \tag{28}$$

ここで, 式 (25) と (26) を使って，単位ベクトルの時間微分を書き換えると

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{v}} &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned} \tag{29}$$

となる。これは，各単位ベクトルの係数が，加速度ベクトルの極座標成分になっている。結構複雑であるが，これが大変役に立つことが以下でわかる。

練習問題

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

から (27) 式を求めよ。

2.3.1 極座標の基底ベクトル

いま $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(r, \theta)$ を極座標の関数とみると、

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(r + dr, \theta + d\theta) - \boldsymbol{r}(r, \theta) \\
&= \boldsymbol{r}(r + dr, \theta + d\theta) - \boldsymbol{r}(r, \theta + d\theta) + \boldsymbol{r}(r, \theta + d\theta) - \boldsymbol{r}(r, \theta)
\end{aligned}
$$

ここで dr と $d\theta$ が十分小さいとして

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(r + dr, \theta + d\theta) - \boldsymbol{r}(r, \theta + d\theta) &= \frac{\boldsymbol{r}(r + dr, \theta + d\theta) - \boldsymbol{r}(r, \theta + d\theta)}{dr} dr \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{r}(r, \theta + d\theta)}{\partial r} dr \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{r}(r, \theta)}{\partial r} dr
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{r}(r, \theta + d\theta) - \boldsymbol{r}(r, \theta) = \frac{\partial \boldsymbol{r}(r, \theta)}{\partial \theta} d\theta
$$

$$
d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} d\theta
$$

である。これと上で得られた関係

$$
d\boldsymbol{r} = dr \boldsymbol{e}_r + r d\theta \boldsymbol{e}_\theta
$$

と比較すると

$$
\boldsymbol{e}_r = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}, \quad \boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{r \partial \theta}
$$

である。ここで $\boldsymbol{r}$ は xy 座標系での成分が

$$
x = r \cos(\theta) \tag{30}
$$

$$
y = r \sin(\theta) \tag{31}
$$

を使うと，これからこれらの基底ベクトルの xy 座標系での成分が得られる。ベクトルの微分は xy 座標系の成分の微分になることを思いおこそう。

3 ２次元極座標での運動方程式

２次元極座標では

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} &= \ddot{r} \boldsymbol{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta) + \dot{r} \dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta + r \ddot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta + r \dot{\theta}(-\dot{\theta} \boldsymbol{e}_r) \\
&= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \boldsymbol{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \boldsymbol{e}_\theta \qquad (32)
\end{aligned}
$$

である。運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{F}$$

である。ここで

$$\boldsymbol{F} = F_r\boldsymbol{e}_r + F_\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

とする。$F_\theta = 0$ の場合を中心力という。

中心力の場合，運動方程式の θ 成分は

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

となる。この式は

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

と変形できる。運動方程式から，ある量の時間微分がゼロという式が得られたことはその量が，運動とともに変化しないことを意味している。このことをその量が保存するという。上の式は

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

で定義される L という量が保存することを意味している。L は $v_\theta = r\dot{\theta}$ であったことを使うと

$$L = mr^2\dot{\theta} = mrv_\theta$$

であり，これを角運動量と呼ぶ。L はどのようなものかを考えてみよう。

3.1 ベクトル積と角運動量ベクトル

L は v_θ と関係しているので，回転と関連していると考えられる。回転は，どのように表せるかと考えてみる。

回転は回転軸の周りをある角速度で回っていることなので，次のベクトル積を使って回転ベクトルを表している。ベクトル積によって作られるベクトルの方向は，回転によって右ネジの進む方向に対応させて，ベクトル積は xyz 座標系では，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ に対して次のように関係させる。x 軸から y 軸の方向に右ネジを回すと右ネジは z 軸方向に進むので

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \tag{33}$$

になるとしている。同じように

$$\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x \tag{34}$$

$$\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \tag{35}$$

ベクトル積の順番を逆にすると，右ねじの進む方向は逆になるので

$$\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_z \tag{36}$$

$$\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_x \tag{37}$$

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = -\boldsymbol{e}_y \tag{38}$$

という関係になる。

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算してみよう。ここで

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{e}_x + b_y \boldsymbol{e}_y$$

の場合を考えて見よう。同じ基本ベクトル同士のベクトル積はゼロなので

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y)\times(b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y) = (a_xb_y-a_yb_x)(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y) = (a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{e}_z$$

となり z 軸方向を向いている。また $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が x 軸となす角を θ_a, θ_b とすると，これは

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = ab(\cos\theta_a \sin\theta_b - \sin\theta_a \cos\theta_b)\boldsymbol{e}_z = ab\sin(\theta_b - \theta_a)\boldsymbol{e}_z$$

となり，それぞれのベクトルの大きさ a, b と，そのなす角 $\theta_b - \theta_a$ の $\sin$ の積となる。

さて，$L = mrv_\theta$ は，x 軸とベクトル $\boldsymbol{r}$ とのなす角を θ とすると，$v_\theta = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta$ であったので

$$L = mrv_\theta = mr(-v_x \sin\theta + v_y \cos\theta) = m(-yv_x + xv_y)$$

である。これは，上の $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の結果と比較すると

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

の z 成分である。つまり $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ を角運動量ベクトルと考えることができる。$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ が xy 平面内であれば $\boldsymbol{L}$ は z 軸方向と平行あるいは反平行になる。

蛇足ながら，v_θ についても考えてみよう。$\boldsymbol{r}$ は xy 座標系での成分が

$$x = r\cos\theta \tag{39}$$

$$y = r\sin\theta \tag{40}$$

から

$$v_\theta \boldsymbol{e}_\theta = -\dot{\theta} r \sin\theta \boldsymbol{e}_x + \dot{\theta} r \cos\theta \boldsymbol{e}_y = -\dot{\theta} y \boldsymbol{e}_x + \dot{\theta} x \boldsymbol{e}_y$$

である。これは $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\theta})$ とおくと

$$v_\theta \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

になっている。v_θ は，xy 平面内であり，$\dot{\theta} > 0$ なら回転軸が z 軸になっており，この表現は妥当である。各自確かめよ。

さらに角運動量ベクトルの

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

の時間微分を考えて見よう。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{v} + m\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

ここで運動方程式

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

を代入すると

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

となる。さらに、右辺第一項は $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ であるからゼロとなるので

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{41}$$

である（この式の右辺はトルクと呼ばれる。この式は角運動量の時間変化はトルクに等しいことを表している）。

ここでトルクについて考えてみよう。(41) 式の右辺は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ が xy 平面内なら

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = rF \sin\theta_{Fr} \boldsymbol{e}_z$$

となるのでこの大きさは力のモーメントになっている。ここで θ_{Fr} はベクトル $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角である。トルクベクトルの方向は、力のモーメントで物体を回す時の回転軸の方向（右ねじの進む方向）を示している。

$\boldsymbol{F}$ が中心力つまり $\boldsymbol{r}$ と平行なら、右辺第 2 項は $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$ であり

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = 0$$

が得られる。つまり、$\boldsymbol{F}$ が中心力なら

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = 0$$

となり、角運動量が保存することになる。

この角運動量ベクトルを考えることで新たに分かることについて、例を用いて次に説明しよう。

角運動量ベクトルの時間変化に関する方程式を用いるとよく運動を理解できる例として、自転車を考えてみよう。自転車が安定して走れるのは、車輪が回転しているからである。自転車に乗って前に進んでいる時車輪の回転による角運動量ベクトルは左を向いている。今からだを左に倒したと考えよう。そうすると車輪とは別に人間と時 z 電車は全体として左に回転する。この回転により新たに発生した角運動量ベクトルは後ろ向きである。今まで左を向いていた車輪の回転による角運動量ベクトルに新たに後ろ向きの角運動ベクトルが加わることになる。この二つの角運動量ベクトルの和で全角運動量ベクトルは少し左後ろになる。その結果車輪は少し左方向に舵を切ることになる。体を傾き続けると自電車は左にハンドルを切り続けることになるのである。

3.2 運動方程式のエネルギー積分

運動方程式

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

の両辺に速度ベクトルを内積させると

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

ここで

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} = m(\frac{dv_x}{dt}v_x+\frac{dv_y}{dt}v_y+\frac{dv_z}{dt}v_z) = m(\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v_x^2)+\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v_y^2)+\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v_z^2)) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v^2)$$

なので

$$m\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

である。両辺を t で積分すると

$$\int m\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 dt = \int \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt$$

より

$$\int m\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 dt = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

右辺は，力と位置の変化の積の積分なので仕事になっている。さらに

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(t)^2 - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(0)^2 = \int_{\boldsymbol{r}(0)}^{\boldsymbol{r}(t)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

となり，仕事をした分だけ，運動エネルギーが増加することを示している。ここで，積分の上限下限を，対応する時間 t と 0 で明示した。このようにして，運動エネルギーの変化を求めることをエネルギー積分と呼んでいる。右辺が積分できて

$$\int_{\boldsymbol{r}(0)}^{\boldsymbol{r}(t)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = w(\boldsymbol{r}(t)) - w(\boldsymbol{r}(0))$$

とおける時,

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(t)^2 - w(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(0)^2 - w(\boldsymbol{r}(0))$$

のように整理できる。この式の値は，t によらないので時間とともに $w(t)$ が大きくなると運動エネルギーも大きくなることを表している。ここで

$$\phi(\boldsymbol{r}(t)) - \phi(\boldsymbol{r}(0)) = -\int_{\boldsymbol{r}(0)}^{\boldsymbol{r}(t)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

とおくと

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(t)^2 + \phi(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(0)^2 + \phi(\boldsymbol{r}(0)) = E$$

となり，運動エネルギーと $\phi(\boldsymbol{r})$（ポテンシャルエネルギ−と呼ばれる）の和が一定となる。E は定数であり，力学的エネルギー保存を表してい

3.3　原点に固定された重力源中の物体の運動

原点に質量 M の重力源が固定されており，その周りを質量 m の物体が運動している場合を考える。

3.4　ポテンシャルとポテンシャル力，ナブラ

次の式でポテンシャルエネルギーを定義できる力をポテンシャル力と呼ぶ。

$$\phi(\boldsymbol{r}(t)) - \phi(\boldsymbol{r}(0)) = -\int_{\boldsymbol{r}(0)}^{\boldsymbol{r}(t)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

この関係で，$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + d\boldsymbol{r}$ とすると

$$\phi(\boldsymbol{r}(t)) - \phi(\boldsymbol{r}(0)) = \phi(\boldsymbol{r}(0) + d\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r}(0)) = -\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

となる。ここで $\boldsymbol{r}(0)) = (x, y, z)$ とすると、$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + d\boldsymbol{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$ となる。

$$\phi(\boldsymbol{r}(0)) = \phi(x, y, z)$$

のように、x, y, z の関数と書くことにとする。これから

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}(0)+d\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r}(0)) &= \phi(x+dx,y+dy,z+dz)-\phi(x,y,z) \\
&= \phi(x+dx,y+dy,z+dz)-\phi(x,y+dy,z+dz) \\
&\quad +\phi(x,y+dy,z+dz)-\phi(x,y,z+dz) \\
&\quad +\phi(x,y,z+dz)-\phi(x,y,z) \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz \\
&= -\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \\
&= -(F_x dx+F_y dy+F_z dz)
\end{aligned}
$$

となる。ここで,

$$\phi(x+dx,y+dy,z+dz)-\phi(x,y+dy,z+dz)=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx$$

となることを使った。以上では、dx は十分小さいとしている。これから

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz=-(F_x dx+F_y dy+F_z dz)$$

が得られ，この関係が任意の dx, dy, dz に対して成り立つには

$$F_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{42}$$

$$F_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{43}$$

$$F_z = -\frac{\partial\phi}{\partial xz} \tag{44}$$

が成り立つ必要がある。これをまとめると

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(F_x,F_y,F_z)=(-\frac{\partial\phi}{\partial x},-\frac{\partial\phi}{\partial y},-\frac{\partial\phi}{\partial z})$$

となる。この関係を表すのに,, 次のナブラという記号 ∇ を用いる。

$$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

これは,

$$\nabla\phi=(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z})$$

のように，関数の左に書くと，その関数を偏微分して，ベクトルの各成分とする，あるいは，各単位ベクトルをかけるという機能を持つ，ナブラを使うと

$$\boldsymbol{F}=-\nabla\phi$$

と簡潔に表せる。

3.4.1　ナブラについて

様々なポテンシャル ϕ について

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$$

を考えてみる

練習問題：ポテンシャルとポテンシャル力

次のポテンシャル ϕ について $(k > 0)$

$$\phi = kx^2$$

$$\phi = -kx^2$$

次の式

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$$

を求め、どのような力であるのか調べよ。

練習問題：ポテンシャルとポテンシャル力

次のポテンシャル ϕ について $(k > 0)$

$$\phi = k(x^2 + y^2)$$

$$\phi = -k(x^2 + y^2)$$

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$$

を求めよ。

以上から、ポテンシャルによる力 $-\nabla\phi$ は、ϕ が地上の山や谷の高さや深さを表し、その山や谷の斜面においた物体に働く重力の斜面方向の成分を表していると解釈できる。

3.5　ナブラと２次元極座標

２次元極座標でポテンシャルエネルギーを考える。ポテンシャル力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = F_r\boldsymbol{e}_r + F_\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

のように２次元極座標の基底ベクトルで表されるとする。$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{e}_r$ の内積をとると、F_r が得られので。

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$$

から、

$$F_r = -\boldsymbol{e}_r \cdot \nabla\phi$$

である。同様に

$$F_\theta = -\boldsymbol{e}_\theta \cdot \nabla\phi$$

である。$d\boldsymbol{r}$ を 2 次元極座標の基底ベクトルで書くと $d\boldsymbol{r} = dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta$ となるので

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_r dr + F_\theta r d\theta$$

である。これと

$$\phi(r+dr, \theta+\theta) - \phi(r, \theta) = -\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

であり、

$$\phi(r+dr, \theta+\theta) - \phi(r, \theta) = \frac{\partial\phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta$$

となることと比較すると、$\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$ であるから、

$$F_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$F_\theta = -\frac{\partial\phi}{r\partial\theta}$$

となる。これから

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}$$

と書けることがわかる。

練習問題：力とポテンシャルとの関係

力の r 成分が

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2}$$

θ 成分が

$$F_\theta = -0$$

の時、

$$F_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$F_\theta = -\frac{\partial\phi}{r\partial\theta}$$

となる ϕ は

$$\phi = -\frac{GMm}{r}$$

であることを示せ。

3.5.1 重力からポテンシャルを求める

$$\phi = -\frac{GMm}{r}$$

から原点に質量 M がある時の重力を受けて運動する質量 m の物体が受ける重力

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

を求めることができることを示した。

では元々のポテンシャルの定義である

$$\phi(\boldsymbol{r}(t)) - \phi(\boldsymbol{r}(0)) = -\int_{\boldsymbol{r}(0)}^{\boldsymbol{r}(t)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

との関係を調べてみよう。右辺を計算すると

$$\begin{aligned} -\int_{\boldsymbol{r}(0)}^{\boldsymbol{r}(t)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{\boldsymbol{r}(0)}^{\boldsymbol{r}(t)} \frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_{\boldsymbol{r}(0)}^{\boldsymbol{r}(t)} \frac{GMm}{r^2}dr \\ &= -\left(\frac{GMm}{r(t)} - \frac{GMm}{r(0)}\right) \end{aligned} \tag{45}$$

となる。ここで $r(t) = |\boldsymbol{r}(t)|$

$$\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r} = dr$$

を使った。よって

$$\phi(\boldsymbol{r}(t)) - \phi(\boldsymbol{r}(0)) = -\left(\frac{GMm}{r(t)} - \frac{GMm}{r(0)}\right) \tag{46}$$

よって

$$\phi(\boldsymbol{r}(t)) = \phi(\boldsymbol{r}(0)) - \left(\frac{GMm}{r(t)} - \frac{GMm}{r(0)}\right) \tag{47}$$

ポテンシャルに定数を加えてもポテンシャルが与える力 $\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$ には影響しない。それでポテンシャルには定数の不定性があると考えられる。よって

$$\phi(\boldsymbol{r}(0)) = -\frac{GMm}{r(0)} \tag{48}$$

と置けば

$$\phi(\boldsymbol{r}(t)) = -\frac{GMm}{r(t)} \tag{49}$$

とできる。

3.6 楕円軌道

運動方程式の r 成分は

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2} \tag{50}$$

である。ここで

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

を使うと

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2}$$

である。これをエネルギー積分すると

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E$$

がえられる。これを書き換えると

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}$$

この式では、右辺第 2 項と第 3 項は r のみの関数であり、これらを合わせて有効ポテンシャルと呼ぶことがあり

$$\phi_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

と表す。これから

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r})}$$

となる。符号 $\pm$ は軌道上で r が増加するか減少するかだけの違いなので，以下では $+$ の方を解く。この式は複雑だが，右辺が r のみの関数なので

$$f(r) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r})}^{1/2}$$

と置くと

$$\frac{dr}{dt} = f(r) \tag{51}$$

と書け，両辺を $f(r)$ で割って，時間で積分すると

$$\int_0^t \frac{1}{f(r)}\frac{dr}{dt}dt = \int_0^t dt$$

これは
$$\int_{r(0)}^{r(t)} \frac{1}{f(r)} dr = t$$
である。ここで
$$\frac{dr}{dt}dt = dr$$
を使った。これを実行すると r と時間 t の関係が得られる。今，軌道の形を調べたいので
$$L = mr^2\dot{\theta}$$
を使う。この式から
$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr2}$$
であるので，両辺を時間で積分すると
$$\int_0^t \frac{d\theta}{dt}dt = \int_0^t \frac{L}{mr^2}dt$$
右辺を r による積分に書き換えると
$$\theta(t) - \theta(0) = \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{L}{mr^2}\frac{dt}{dr}dr$$
ここで (51) 式
$$\frac{dr}{dt} = f(r)$$
を使うと
$$\theta(t) - \theta(0) = \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{L}{mr2}\frac{1}{f(r)}dr$$
となる。ここで
$$f(r) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r})}$$
である。この式は複雑なので $a = 2E/m$, $b = L^2/m^2$, $c = 2GM$ と置くと
$$f(r) = \sqrt{a - \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r}}$$
となる。さらに $u = 1/r$ という変数を使うことにする。これから
$$du = -\frac{1}{r^2}dr$$

であるので積分は

$$\theta(t)-\theta(0)=-\int_{r(0)}^{r(t)}\frac{L}{m}\frac{1}{f(r)}du$$

ここで $f(r)$ を u で書き換えると

$$f(r)=\sqrt{a-bu^2+cu}=\sqrt{a-b(u-\frac{c}{2b})^2+\frac{c^2}{4b}}$$

となるので，さらに $d=a+\frac{c^2}{4b}$ と置くと

$$f(r)=\sqrt{d-b(u-\frac{c}{2b})^2}$$

そうする積分は

$$\theta(t)-\theta(0)=-\int_{r(0)}^{r(t)}\frac{L}{m}\frac{1}{\sqrt{d-b(u-\frac{c}{2b})^2}}du$$

ここで

$$\sqrt{b}(u-\frac{c}{2b})=\sqrt{d}\cos\varphi$$

と置くと

$$\sqrt{b}du=-\sqrt{d}\sin\varphi d\varphi$$

$$\theta(t)-\theta(0)=\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)}\frac{L}{m}\frac{1}{\sqrt{d-d\cos^2\varphi}}\sqrt{\frac{d}{b}}\sin\varphi d\varphi=\varphi(t)-\varphi(0)$$

ここで $b=L^2/m^2$、$d=a+\frac{c^2}{4b}$ を使った。これから

$$\theta(t)=\varphi(t)$$

とおける。

$$\sqrt{b}(u-\frac{c}{2b})=\sqrt{d}\cos\varphi$$

は

$$\sqrt{b}(1/r-\frac{c}{2b})=\sqrt{d}\cos\theta$$

これから

$$\sqrt{b}-\frac{c}{2\sqrt{b}}r=\sqrt{d}r\cos\theta$$

$$r=\frac{\sqrt{b}}{\frac{c}{2\sqrt{b}}+\sqrt{d}\cos\theta}=\frac{\sqrt{b}\frac{2\sqrt{b}}{c}}{1+\sqrt{d}\frac{2\sqrt{b}}{c}\cos\theta}$$

これは楕円の方程式である。ここで $a = 2E/m$,$b = L^2/m^2$，$c = 2GM$，$d = a + \frac{c^2}{4b}$ であるので

$$r = \frac{\frac{L^2}{m^2GM}}{1 + (\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{G^2M^2m^2}{L^2}})\frac{L}{GMm}\cos\theta} = \frac{\frac{L^2}{m^2GM}}{1 + (\sqrt{\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3} + 1})\cos\theta}$$

ここで，分母の $\cos\theta$ の前の係数は離心率 e に対応し，

$$e = \sqrt{\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3} + 1}$$

$E < 0$ なので

$$\sqrt{\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3} + 1} < 1$$

であり，軌道は楕円となる。同様にして，$E = 0$ のとには放物線軌道，$E > 0$ の時には双曲線軌道となることを示すことができる。

3.7 ２章と３章のまとめ

運動を記述するのに、ベクトルを用いる。当面話を 2 次元に限定する。

物体の位置を x 座標と y 座標で表せる。これを成分とする位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を考える。x 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$、y 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{j}$ とすると

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

である。

3.8 ベクトルの微分

dt の間の位置の変化を

$$dx = v_x dt$$

$$dy = v_y dt$$

とすると

$$d\boldsymbol{r} = v_x dt\boldsymbol{i} + v_y dt\boldsymbol{j}$$

であり

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$$

の関係がある。これから

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

である。つまり、ベクトルの微分は x 成分と y 成分の微分である。

3.8.1　2次元極座標の単位ベクトル

次に $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ を考える。

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

であるから

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{x}{r}\boldsymbol{j} = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$$

の関係があることがわかる。よって

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

である。これから速度を計算すると

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}$$

である。ここで

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} =$$

4　運動方程式の解法

4.1　$F = 0$ のとき

運動方程式の解には、二つの任意定数が含まれる。これらは初期条件できまる。任意定数を二つ含む解を一般解という。

4.2　$F = kx$ のとき

運動方程式が定係数の２階の微分方程式となるので解の形を指数関数を仮定して代入して解を求める方法がとられる。$k > 0$ とする。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx \tag{52}$$

これは

$$\left(\frac{d}{dt} + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(\frac{d}{dt} - \sqrt{\frac{k}{m}}\right)x = 0$$

と書ける。これは

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)x = f(t) \\ \left(\frac{d}{dt} - \sqrt{\frac{k}{m}}\right)f(t) = 0 \end{cases} \tag{53}$$

の連立一階微分方程式で表せる。第２式は

$$\frac{d}{dt}f = \sqrt{\frac{k}{m}}f(t)$$

これから

$$f = \exp(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c)$$

ここで，c は任意定数。第一式に代入して

$$\frac{d}{dt}x = -\sqrt{\frac{k}{m}}x + \exp(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c)$$

ここで

$$x = g(t)h(t)$$

とおくと

$$h\frac{d}{dt}g + g\frac{d}{dt}h = -\sqrt{\frac{k}{m}}gh + \exp(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c)$$

これを

$$\begin{cases} h\frac{d}{dt}g = -\sqrt{\frac{k}{m}}gh \\ g\frac{d}{dt}h = \exp(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c) \end{cases} \tag{54}$$

のように連立させると，第一式は解くことができる。

$$\frac{d}{dt}g = -\sqrt{\frac{k}{m}}g$$

解は

$$g = \exp(-\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_1)$$

これを第二式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h &= \exp(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c)/\exp(-\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_1) && (55) \\ &= \exp(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + c - c_1) && (56) \end{aligned}$$

これから

$$h = \frac{1}{2\sqrt{\frac{k}{m}}}\exp(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + c - c_1) + c_2$$

以上から

$$
\begin{aligned}
x &= gh && (57)\\
&= \exp(-\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_1)(\frac{1}{2\sqrt{\frac{k}{m}}}\exp(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + c - c_1) + c_2) && (58)\\
&= c_1' \exp(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + c_2' \exp(-\sqrt{\frac{k}{m}}t) && (59)
\end{aligned}
$$

ここで

$$c_1' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{k}{m}}}\exp(c)$$

$$c_2' = c_2 \exp(c_1)$$

とおいた。これらは任意定数である。

$$x = c_1' \exp(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + c_2' \exp(-\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

は二つの任意定数を含む解なので，一般解になっている。解は指数関数的に増大する第 1 項と，指数関数的に減少する第二項からなっている。

一般解の確認

$$x = c_1' \exp(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + c_2' \exp(-\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

が式 (52) の一般解であることを確かめなさい。

指数関数を仮定して解いてみよう。

二つの初期条件

減衰力のみなら、指数関数の解の代わりに変数分離形でも解けるが，減衰力とバネの復元力の両方を考慮した場合には指数関数を仮定しないと解けない。

4.3 $F = -kx, k > 0$ の場合

原点からの距離に比例する力 $F = -kx$ による運動。バネ振動子。

$$m\ddot{x} = -kx \tag{60}$$

が運動方程式です。

$$x = e^{\alpha t}$$

を仮定して代入すると、この式は

$$\alpha^2 = -\omega^2$$

ここで、$\omega = \sqrt{k/m}$ である。解は $\alpha = \pm i\omega$。この定数倍も運動方程式なので一般解は

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \tag{61}$$

である。ここで C_1, C_2 は任意定数．オイラーの式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を使うと実数の解を得るのに便利である．

4.4 $F = -\gamma v - kx$ 減衰力がある場合

減衰力を $-\gamma\dot{x}$ とすると、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \tag{62}$$

となる。

$$x = e^{\alpha t}$$

を仮定して代入すると、次の式が得られる

$$\alpha^2 = -\omega^2 - \alpha\frac{\gamma}{m} \tag{63}$$

ここで $\omega^2 = k/m$ である。これを次の場合について調べてみる。
1)$(\gamma/2m)^2 < \omega^2$ のとき

$$\omega'^2 = \omega^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2$$

とおくと (63) 式を満たす α は

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\omega'$$

これより

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{-\frac{\gamma}{2m}t + i\omega' t} + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2m}t - i\omega' t} && (64) \\ &= e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}) && (65) \end{aligned}$$

解の特徴は，時間とともに指数関数的に減衰する事と振動数が減衰力がない場合と比べて $\gamma'^2 = \gamma^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2$ とずれる事である。

x の速度は

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\gamma}{2m}e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(C_1e^{i\omega' t} + C_2e^{-i\omega' t}) + i\omega' e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(C_1e^{i\omega' t} - C_2e^{-i\omega' t})$$

となる。$\dot{x} = 0$ となる時刻 t は

$$\tan(\omega' t + \phi) = -\frac{1}{\omega'}\frac{\gamma}{2m}$$

を満たす。ここで

$$\tan(\omega' t + \phi) = i\frac{C_1e^{i\omega' t} + C_2e^{-i\omega' t}}{C_1e^{i\omega' t} - C_2e^{-i\omega' t}}$$

の関係がある。こうなる時刻を $t = 0$ から順番に $t_1, t_2.$ とすると

$$t_{n+1} - t_n = \pi/\omega'$$

の関係にある。各 t_n での x を x_n とすると

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = -e^{-\pi\frac{\gamma}{2m\omega'}}$$

よって

$$\pi\frac{\gamma}{m\omega'} = 2\log(|\frac{x_{n+1}}{x_n}|)$$

を対数減衰度とよぶ。

2)$(\gamma/2m)^2 \geq \omega^2$ のとき振動子は減衰するだけ。

2.1) $\frac{\gamma}{2m} > \omega$ のとき

$$\alpha^2 = -\omega^2 - \alpha\frac{\gamma}{m}$$

を満たす α は実根で

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

これらを $\alpha_1 = -p_1$, $\alpha_2 = -p_2$ とすると解は

$$x = C_1e^{-p_1t} + C_2e^{-p_2t}$$

となる。これを過減衰の解と言う。

2.2) $\frac{\gamma}{2m} = \omega$ のとき

$$\alpha^2 = -\omega^2 - \alpha\frac{\gamma}{m}$$

α は実根で
$$\alpha = -\frac{\gamma}{2m}$$
となり重根となる。これを使うと運動方程式は
$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = 0 \tag{66}$$
となる。運動方程式は 2 階微分方程式なので独立な解がもう一つあるはずである．これを求めてみよう。

そのために、$x = A(t)e^{-\alpha t}$ として見えると
$$\dot{x} = \dot{A}(t)e^{-\alpha t} - \alpha A(t)e^{-\alpha t}$$
$$\ddot{x} = \ddot{A}(t)e^{-\alpha t} - 2\alpha\dot{A}(t)e^{-\alpha t} + \alpha^2 A(t)e^{-\alpha t}$$
となる。これを使うと運動方程式
$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = 0 \tag{67}$$
は、
$$\ddot{A}e^{-\alpha t} = 0$$
よって
$$A = C_1 t + C_2$$
一般解は
$$x = (C_1 t + C_2)e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \tag{68}$$
である。
$$\dot{x} = (C_1(1 - \frac{\gamma}{2m}t) - \frac{\gamma}{2m}C_2)e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \tag{69}$$

初期条件を満たす解

この解で、$t=0$ で $\dot{x}=0$ で $x=c$ のときの解を求めよう。$t=0$ で $x=c$ より

$$C_2 = c$$

$t=0$ で $\dot{x}=0$ より

$$\dot{x} = C_1 - \frac{\gamma}{2m}C_2 = 0$$

$C_2 = c$ より

$$C_1 = \frac{\gamma}{2m}c$$

よって解は

$$x = c(\frac{\gamma}{2m}t + 1)e^{-\frac{\gamma}{2m}t}$$

. 速度は

$$\dot{x} = c(-\frac{\gamma}{2m}(1+\frac{\gamma}{2m}t) + \frac{\gamma}{2m})e^{-\frac{\gamma}{2m}t} = -c\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 te^{-\gamma t}$$

$c>0$ の場合に x と $\dot{x}$ のグラフを書いてみよ。

4.5 外力がある場合

振動子に対して振動的な外力 $F_e = F_0\cos\omega t$ が働いている時の運動方程式は、質点の質量 m でわると

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{70}$$

この方程式は，電荷の振動子に対して外から電磁波が入って来た時の古典電磁気学モデルと対応している。減衰項は，電磁波放射の反動を近似的に表している。

その前に、簡単な場合として $\gamma=0$ として以下の場合を解いてみよう。

1. $F_e = A$ で A は定数。$t=0$ で $x=\dot{x}=0$ の解。
2. $F_e = At$ で A は定数
3. $F_e = A\sin\omega_0 t$

を解く (解は省略).

(70) 式の解の形を $x = a\cos(\omega t - \phi)$ と仮定して解を求めてみよう。

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a\cos(\omega t - \phi) - 2a\gamma\omega\sin(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{71}$$

余弦加法定理を使って ϕ を

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{72}$$

とすると、$\omega=\omega_0$ で $\phi=\pi/2$

$$a\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}\cos\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{73}$$

よって

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}} \tag{74}$$

a の 2 乗はこのような時の電荷の振動子から放射される放射の強さを表し，ϕ は phase shift とよばれる。様々な ω の外力を与えると a の 2 乗は ω に依存して変化する。ω に対して a^2 のグラフを書いた時、a^2 がピークの時の ω とピークの半分の値になる時の ω との差はほぼ $1/\gamma$ の関係にある（各自やってみよう）。

以上のように

$$x = a\cos(\omega t-\phi) \tag{75}$$

で表せる解を求めたが，これには未定定数が含まれていないので特解となっている。一般解は外力ゼロの時の一般解（これを同次方程式の一般解という）と特解との和になっていることは解を代入するとすぐ分かる。十分時間がたつと，特解以外の部分は減衰してしまう。様々な ω に対して振幅 a が最大に成るのは、a の式の分母を ω^2 で微分して

$$-2(\omega_0^2-\omega^2)+(2\gamma)^2=0$$

より

$$\omega^2=\omega_0^2-2\gamma^2$$

のときである。γ が非常に小さいときには $\omega^2=\omega_0^2$ のときで、このとき共鳴という。

4.5.1 減衰力がないときの解を求めよ

$$\ddot{x}+\omega^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega_0 t \tag{76}$$

1) 次の場合の解

$$\omega^2 \neq \omega_0^2$$

の時は

$$x = A\sin(\omega_0 t)$$

と置いて解を求めることができる．運動方程式に代入すると

$$-\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t) + \omega^2 A\sin(\omega_0 t) = \frac{F_0}{m}\sin\omega_0 t$$

これから

$$-\omega_0^2 A + \omega^2 A = \frac{F_0}{m}$$

よって

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

2) 共鳴の場合の解

$$\omega^2 = \omega_0^2$$

$$\omega_0 = \omega$$

とする．

$$x = a(t)\sin(\omega t + c) \tag{77}$$

と仮定して代入し特解をもとめる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt}\sin(\omega t + c) + a\omega\cos(\omega t + c)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2}\sin(\omega t + c) + 2\frac{da}{dt}\omega\cos(\omega t + c) - a\omega^2\sin(\omega t + c)$$

となることを使うと，運動方程式は

$$\frac{d^2a}{dt^2}\sin(\omega t+c)+2\frac{da}{dt}\omega\cos(\omega t+c)-\omega^2 a\sin(\omega t+c)+\omega^2 a\sin(\omega t+c) = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

これから

$$\frac{d^2a}{dt^2}(\sin\omega t\cos c + \cos\omega t\sin c) + 2\frac{da}{dt}\omega(\cos\omega t\cos c - \sin\omega t\sin c) = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

整理して

$$(\frac{d^2a}{dt^2}\cos c - 2\frac{da}{dt}\omega\sin c - \frac{F_0}{m})\sin\omega t + (\frac{d^2a}{dt^2}\sin c + 2\frac{da}{dt}\omega\cos c)\cos\omega t = 0$$

これがいつも成り立つためには、$\sin\omega t$ と $\sin\omega t$ の係数がゼロとなる必要があるから

$$\begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2}\cos c - 2\dfrac{da}{dt}\omega\sin c - \dfrac{F_0}{m} = 0 \\ \dfrac{d^2a}{dt^2}\sin c + 2\dfrac{da}{dt}\omega\cos c = 0 \end{cases} \tag{78}$$

この二つから d^2a/dt^2 を消去して

$$-2\frac{da}{dt}\omega\frac{\cos^2 c}{\sin c} - 2\frac{da}{dt}\omega\sin c - \frac{F_0}{m} = 0$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{F_0}{m}\frac{\sin c}{2\omega}$$

この a の解は

$$a = -\frac{F_0}{m}\frac{\sin c}{2\omega}t + c_1$$

この時 $d^2a/dt^2 = 0$ なので、式 (78) の第 2 式が成り立つためには

$$2\frac{da}{dt}\omega\cos c = 0$$

でなければいけない．よって

$$c = \frac{\pi}{2}$$

よって

$$a = -\frac{F_0}{m}\frac{1}{2\omega}t + c_1$$

特解は $c_1 = 0$ としても良いので式 (77) より

$$x = -\frac{F_0}{m}\frac{1}{2\omega}t\cos(\omega t)$$

一般解は

$$x = c_2\sin(\omega t + c_3) - \frac{F_0}{m}\frac{1}{2\omega}t\cos(\omega t)$$

$t = 0$ で $x = 0$，$dx/dt = 0$ の解は

$$x = \frac{F_0}{m}\frac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{F_0}{m}\frac{1}{2\omega}t\cos(\omega t)$$

である．解の形は複雑であるが、時間とともに振幅が増大する解になっている．

4.5.2 フックの法則に従うバネの下には質量 m の質点，上端を単振動させるときの解。

下向きに x 軸をとる。l をばね自然長の端の位置とすると $x-l$ がバネの伸びであるので運動方程式は

$$m\ddot{x} = mg - k(x-l)$$

となる。$x > l$ のときは負の力，$x < l$ の時は正の力が働くことになる。l が

$$l = l_0 + A\cos\omega t$$

のように変化すると，それに応じて質点に働く力も変化する。

$$\ddot{x} = g - (k/m)x + (k/m)l) = -\omega_0^2(x - l - mg/k)$$

より

$$\xi = x - l_0 - mg/k$$

と $k/m = \omega_0^2$ とおいて解く。

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2\xi + \omega_0^2 A\cos\omega t$$

4.6 ロケットの運動

ロケットが真空中でも飛行できるのは，なぜだろうか。ロケットがガスを噴出して運動する。はじめは，重力は考えない。ロケットの質量を m、ガスの放出率を一定値の $\dot{m}_e > 0$、ガスの放出速度を $v_e < 0$ とする。運動量保存則から dt 前後の運動量は等しいので

$$mv = (m-\dot{m}_e dt)(v+\dot{v}dt)+\dot{m}_e dt(v+v_e) = mv-\dot{m}_e v dt+m\dot{v}dt+\dot{m}_e dt(v+v_e)$$

の関係がある。よって、dt の一次で比較すると

$$m\dot{v} = -\dot{m}_e v_e$$

これに重力がかかっているとすると

$$m\dot{v} = -\dot{m}_e v_e - mg$$

よって

$$\dot{v} = -\frac{\dot{m}_e}{m}v_e - g$$

ここで $m = m_0 - \dot{m}_e t$ となることから

$$\dot{v} = -\frac{\dot{m}_e}{m_0 - \dot{m}_e t} v_e - g$$

解は $t = 0$ で $v = 0$ とすると

$$v(t) = v_e ln(\frac{m_0 - \dot{m}_e t}{m_0}) - gt$$

ロケットの燃料以外の質量を m_f とすると

$$\dot{m}_e t_f = m_0 - m_f$$

より

$$t = \frac{m_0 - m_f}{\dot{m}_e}$$

$$v_f = v_e ln(\frac{m_f}{m_0}) - g\frac{m_0 - m_f}{\dot{m}_e}$$

このように，v_f は，v_e と m_f/m_0 に依存する。v_e は燃料やエンジンで決まっているので，m_f/m_0 をなるべく小さくした方が，速度があがることになる。そのため，多段ロケットが用いられている。

ここで $f_m = m_f/m_0$ とおくと

$$v_f = v_e ln(f_m) - g\frac{m_0}{\dot{m}_e}(1 - f_m)$$

ここで $ln(0.1) = -2.3$、$ln(0.01) = -4.6$、$ln(0.001) = -6.7$

$$v_f > v_{esc}$$

の条件は

$$v_e ln(f_m) - g\frac{m_0}{\dot{m}_e}(1 - f_m) > v_{esc}$$

$$\dot{m}_e > g\frac{m_0}{(-v_{esc} + v_e ln(f_m))}(1 - f_m)$$

4.7 連成振動子

多数の相互作用している振動子のあつまり。格子振動のモデル。

ここでは，3 個の同じおもりと 4 本の同じバネでつながれた一次元振動子系を考える。各おもりの質量を m 平衡点からのずれを x_1 などとする。バネ定数は同じ k.

m_1 に働く力は、おもりの左側のバネによる $-kx_1$ と右側のバネによる $-k(x_1-x_2)$ が働く。m_2 には左がわのバネによる $-k(x_2-x_1)$ と右側のバネによる $-k(x_2-x_3)$ がはたらく。m_3 には同様に $-k(x_3-x_2)$ と右側のバネによる $-kx_3$ がはたらく。これをまとめると

$$m\ddot{x}_1 = -k(2x_1 - x_2) \tag{79}$$
$$m\ddot{x}_2 = -k(2x_2 - x_1 - x_3) \tag{80}$$
$$m\ddot{x}_3 = -k(2x_3 - x_2) \tag{81}$$

となる。

とき方は、運動方程式をベクトルと行列を使って表し、行列を対角化するような変換を見つけて解くとき方がある。固有値と固有ベクトルを求めるやり方である.

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{82}$$

これを $\boldsymbol{X}$ でベクトル，$\boldsymbol{A}$ で行列を表して

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{AX}$$

とかいて，

$$\boldsymbol{AX} = \gamma\boldsymbol{X}$$

が自明でない解を持つ条件

$$|\boldsymbol{A} - \gamma\boldsymbol{I}| = 0$$

から固有値 γ_i を求め，それを

$$\boldsymbol{AX} = \gamma_i\boldsymbol{X}$$

に代入することで，固有ベクトル $\boldsymbol{X}_i$ が求まる。この条件式は

$$(-2-\gamma)^3 - 2(-2-\gamma) = 0$$

$$((-2-\gamma)^2 - 2)(-2-\gamma) = 0$$

よって $\gamma = -2, -2 \pm \sqrt{2}$ に成る。

$\gamma = -2$ の時

$$\boldsymbol{AX} = \gamma\boldsymbol{X}$$

は

$$\begin{pmatrix} -2+2 & 1 & 0 \\ 1 & -2+2 & 1 \\ 0 & 1 & -2+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{83}$$

解は $x_1 = -x_3, x_2 = 0$ である。

余因子行列と逆行列

行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$ とおくと

$$A\tilde{A} = det(A)E$$

となる。よって,

$$A^{-1} = \tilde{A}/det(A)$$

そうすると方程式は固有ベクトル $\boldsymbol{X}_i$ に対して簡単になり

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{X}_i = \gamma_i \boldsymbol{X}_i$$

と変換できるので簡単になる。

今の場合の固有値は－２，－２ $\pm i\sqrt{2}$，固有ベクトルは次のページに書かれているものになる。

ここでは別のやり方をとる。第２式を α 倍、第３式を β 倍して加えると

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3) = -k((2x_1 - x_2) + \alpha(2x_2 - x_1 - x_3) + \beta(2x_3 - x_2)) \tag{84}$$

$$= -k((2-\alpha)x_1 + (2\alpha - \beta - 1)x_2 + (2\beta - \alpha)x_3) \tag{85}$$

左辺と右辺の対応する変数の係数が、それぞれで同じ比率になっていると解けるので、そのためには

$$1 : (2-\alpha) = \alpha : (2\alpha - \beta - 1) = \beta : (2\beta - \alpha)$$

であればいいので

$$2\alpha - \beta - 1 = \alpha(2-\alpha)$$

$$(2\beta - \alpha) = \beta(2-\alpha)$$

であればよい。第１式は

$$\beta + 1 = \alpha^2$$

第２式は

$$-\alpha = -\alpha\beta$$

よって

$$\alpha(\beta - 1) = 0$$

よって、解は $\alpha = 0$ か $\beta = 1$。

- $\alpha = 0$ のとき、第一式から $\beta = -1$
- $\beta = 1$ のとき、第一式から $\alpha = \pm\sqrt{2}$

この３通りである．それぞれについて解く
$\beta = 1$ のとき、$\alpha = \sqrt{2}$ の場合

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3) = -k((2-\sqrt{2})x_1 + (2\sqrt{2}-2)x_2 + (2-\sqrt{2})x_3) \tag{86}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3) = -(2-\sqrt{2})k(x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3) \tag{87}$$

$\alpha = 0$ のとき、$\beta = -1$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_3) = -k(2x_1 - 2x_3) \tag{88}$$

$\beta = 1$ のとき、$\alpha = -\sqrt{2}$ の場合

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3) = -(2+\sqrt{2})k(x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3) \tag{89}$$

それぞれの方程式の解は

$$\omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})k/m}$$

$$\omega_2 = \sqrt{(2k/m)}$$

$$\omega_3 = \sqrt{(2+\sqrt{2})k/m}$$

一般解は

$$x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = a_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{90}$$
$$x_1 - x_3 = a_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \tag{91}$$
$$x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = a_3\cos(\omega_3 t + \phi_3) \tag{92}$$
$$\tag{93}$$

これから，$x_1x_2x_3$ についてとくと，

第一式＋第 3 式+ 2 $\times$ 第 2 式＝ $4x_1$

第一式-第 3 式＝ $2\sqrt{2}x_2$

第一式＋第 3 式- 2 $\times$ 第 2 式＝ $4x_3$

となるので、それぞれの解の線形結合であらわせる。

$$x_1 = \frac{1}{4}(a_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) + 2a_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) + a_3\cos(\omega_3 t+\phi_3))$$

$$x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) - a_3\cos(\omega_3 t+\phi_3))$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(a_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) - 2a_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) + a_3\cos(\omega_3 t+\phi_3))$$

この式から、$a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = 0$ の時の振動は ω_1 で振動するようになる。この時の各おもりの振動の様子は

$a_1 = 0, a_2 \neq 0, a_3 = 0$ の時の振動は

$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 \neq 0$ の時の振動は

振動のようすと振動数との関係を理解できる。

各おもりが同一の振動数で振動するには、各おもりの変位が決まった割合である必要がある。これをノーマルモードあるいは基準振動と呼ぶ。

x_1, x_2, x_3 を 3 軸とする座標をとると、基準振動はある決まった方向への振動に対応する。

$$Q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3)$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3)$$

$$Q_3 = \frac{1}{2}(x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3)$$

ととるとこれらは互いに直交する。このような座標系を基準座標系と呼ぶ。また、大きさは x_1, x_2, x_3 が 1 とすると $Q_1, Q_2, Q_3 1$ になるようにしてある．それぞれ、のベクトルの成分は

$$(1, \sqrt{2}, 1), (1, 0, -1), (1, -\sqrt{2}, 1),$$

となり x_1, x_2, x_3 を 3 軸とする座標で直交する事を示せる。

各方程式は

$$\ddot{Q}_j = -\omega_j^2 Q_j$$

逆変換すると、

$$x_1 = \frac{1}{2}(Q_1 + \sqrt{2}Q_2 + Q_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(Q_1 - \sqrt{2}Q_2 + Q_3)$$

運動方程式の力を導くようなポテンシャルは

$$U = k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3)$$

である。これを書き換えると

$$U = \frac{k}{2}((2-\sqrt{2})Q_1^2 + 2Q_2^2 + (2+\sqrt{2})Q_3^2)$$

運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{m}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2 + \dot{Q}_3^2)$$

全エネルギーは

$$K + U = \sum_j (\frac{m}{2}\dot{Q}_j^2 + \frac{m}{2}\omega_j^2 Q_j^2)$$

これは，基準座標系では，振動子の集まりと見なせることを示している。

5　参考文献

6　Appendix: 剛体の力学

剛体の重心の運動は全質量が重心の位置に有り，外力の和が重心にかかる場合の運動方程式にしたがう。そして剛体の運動は，この重心の運動と，剛体の回転運動に外力による力のモーメントが働いている場合の運動方程式に従う。

剛体を m_i からなる形をかえないと仮定すると内力は形を変えないことに使われる。よって m_i の座標を $\boldsymbol{r}_i$ とし，これに働く外力を $\boldsymbol{F}_i$ とすると

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i$$

なので，剛体全体では

$$\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

左辺は

$$\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = M\boldsymbol{R}_G$$

なので，剛体の重心はそれに全外力が働いた場合と同じになる。

次に

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i$$

に $\boldsymbol{r}_i$ を外積させて和を取ると

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

となる。ここで、左辺は

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

なので，剛体の全角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

となるので

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

となる。これは，剛体の角運動量の時間変化は剛体に働く力のモーメントの和になっていることを示している。

6.1 剛体の自由度

剛体：形がかわらない物体

質点間の距離 $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ がいつも変わらない

n 個の質点からなる物体、自由度は $3n$

剛体なら自由度は6、これは、剛体の位置を決めるには３点の位置が決まれば良い．これを ABC とすると、A を決めるのに座標の３つの情報が必要。B は距離が決まっているので方向を決める自由度が２、C は AB の軸の周りの回転しかないので自由度は１。合計の自由度は６。

例　２原子分子。自由度は６。重心の移動で３。回転（２）と振動（１）。剛体なら振動が凍結されるので、自由度は５となる．

量子力学の効果で，低温では並進の自由度のみ、少し温度を上げると回転の自由度、もっと高温にして振動の自由度があらわれる．

6.2　剛体の釣り合い

外力の和がゼロ

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = 0$$

力のモーメントの和がゼロ

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0$$

例　半径１ m のテーブル、質量は２０ kg、３本の足が等間隔についている。１０ kg のものをテーブルにのせて、それぞれ、５ kg、１０ kg，１５ kg となるようにするには、どこにのせらばいいか。

各足の座標は，半径１の円周上に有るとすると $(0,0), (\sqrt{3},0), (\sqrt{3}/2, 1.5)$ となる。ここに，5kg,10kg，１５ kg が下から上向きに働き，下向きには円の中心の座標 ($\sqrt{3}/2, 0.5)$ に 20kg，(x,y) の点に１０ kg が下向きに働いている。これから，つりあいの方程式を解いて (x,y) を求めれば良い。

6.3　剛体が固定軸のまわりを回転しているとき

剛体が固定軸のまわりを回転しているときを考える。固定軸を z 軸とする。この剛体の角運動量について考えよう。

剛体の適当な一点から z 軸へおろした垂線を x 軸とする。剛体の各部分の位置を (x_i, y_i, z_i) で表すと各部分は剛体の回転の回転とともに動くので、$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ とおくと

$$x_i = r_i \cos\theta_i$$

$$y_i = r_i \sin\theta_i$$

とかけ、

$$\dot{x}_i = -r_i \sin\theta_i \dot{\theta}_i = -\dot{\theta}_i y_i$$

$$\dot{y}_i = r_i \cos\theta_i \dot{\theta}_i = \dot{\theta}_i x_i$$

となる。よって，

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, 0)$$

となる。$\dot{\theta}_i$ は剛体の回転角速度 $\dot{\theta}$ とひとしい。剛体の角運動量の z 成分は

$$L_z = \sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i)_z = \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)\dot{\theta}$$

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

を z 軸周りの慣性モーメント I_z とおくと

$$L_z = I_z\dot{\theta}$$

となる。剛体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{r}_i \cdot \dot{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_i m_i((x_i^2 + y_i^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2$$

となる。このように回転する剛体の角運動量と運動エネルギーは，回転軸のまわりの慣性モーメントと角速度で表すことができる。形は，運動量のときの質量と速度が，角運動量では慣性モーメントと角速度に対応している。運動エネルギーでも同じである。

次に，剛体の運動方程式を調べてみよう。外力が有っても剛体はこの軸のまわりを回転するとする。剛体の各部分の運動方程式から

$$m_i\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ji})$$

これを剛体全体に加えると

$$\sum_i m_i\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ji})$$

$\boldsymbol{F}_{ji}$ は内力なので角運動量の変化には寄与しない。左辺の z 成分は

$$(\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i)_z = x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i = x_i^2 + y_i^2)\dot{\theta}_i = r_i^2\dot{\theta}$$

となるので

$$\sum_i m_i\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i)_z = (\sum_i m_i r_i^2)\ddot{\theta}$$

よって、運動方程式の z 成分から

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z\ddot{\theta} = \sum_i(x_i\boldsymbol{F}_{iy} - y_i\boldsymbol{F}_{jx})$$

また，

$$L_z = I_z\dot{\theta}$$

は角運動量の z 成分である。同様に，

$$I_x = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)$$

を x 軸周りの慣性モーメントとよぶ。

$$I_y = \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2)$$

を y 軸周りの慣性モーメントとよぶ。

6.4 実体振り子

省略

6.5 慣性モーメントと慣性乗積

6.5.1 慣性モーメント

剛体に固定した直交座標系 (ξ, η, ζ) を考える。各軸に関する慣性モーメントは

$$I_\xi = \sum_i m_i(\eta_i^2 + \zeta_i^2)$$

など。

例：中空球の慣性モーメント、直方体の慣性モーメント

重心を通り，全質量が M で ζ 軸と平行な軸の周りの慣性モーメント I_G をもとめる。

重心の座標を (ξ_G, η_G, ζ_G) とすると

$$I_G = \sum_i m_i((\xi_i - \xi_G)^2 + (\eta_i - \eta_G)^2)$$

$$= \sum_i m_i(\xi_G^2 + \eta_G^2) + (\xi_i^2 + \eta_i^2) - 2\xi_G\xi_i - 2\eta_G\eta_i)$$

$$= I_\zeta + M(\xi_G^2 + \eta_G^2) - 2\xi_G(\sum_i m_i\xi_i) - 2\eta_G(\sum_i m_i\eta_i)$$

$$= I_\zeta + M(\xi_G^2 + \eta_G^2) - 2M\xi_G^2 - 2M\eta_G^2$$

よって

$$I_\zeta = I_G + M(\xi_G^2 + \eta_G^2)$$

これを平行軸の定理と言う。

例：薄い円盤に垂直な軸を ζ 中心を通る軸を xi、xi 軸上の円周と中心の中間点を原点として η をとる。I_ζ を求めよ.

6.5.2 慣性乗積

$$I_{\eta\zeta} = \sum_i m_i\eta_i\zeta_i$$

などと定義。対称性が良ければこれらはゼロ．剛体の力学

6.5.3　慣性楕円体

任意の軸 OX のまわりの慣性モーメントを考える。軸 OX は，剛体に固定した座標系 (ξ,η,ζ) の原点 O を同じとする。OX と (ξ,η,ζ) の各軸とのなす角の cos を λ,μ,ν とする。剛体中の一点 P_i から OX 軸におろした垂線を P_iQ_i とする。つまり

$$e_X\cdot e_\xi=\lambda,\ e_X\cdot e_\eta=\mu,\ e_X\cdot e_\zeta=\nu$$

なので OP_i と OX のなす角を θ_i，$OP_i=r_i$ とすると、

$$\vec{OP}\cdot\boldsymbol{e}_X=r_i\cos\theta_i=(\xi_i\lambda+\eta_i\mu+\zeta_i\nu)$$

$$\begin{aligned}P_iQ_i^2&=r_i^2\sin^2\theta_i=r_i^2(1-\cos^2\theta_i)\\&=(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2)-(\xi_i\lambda+\eta_i\mu+\zeta_i\nu)^2\\&=(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)-(\xi_i\lambda+\eta_i\mu+\zeta_i\nu)^2\end{aligned}$$

ここで $(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)=1$ をつかった。そうすると

$$P_iQ_i^2=(\eta_i^2+\zeta_i^2)\lambda^2+(\xi_i^2+\zeta_i^2)\mu^2+(\xi_i^2+\eta_i^2)\nu^2-2\xi_i\lambda\eta_i\mu-2\eta_i\mu\zeta_i\nu-2\zeta_i\nu\xi_i\lambda$$

m_i をかけて和を取ると，これは OX 軸まわりの慣性モーメントとなる。

$$I_{OX}=I_\xi\lambda^2+I_\eta\mu^2+I_\zeta\nu^2-2I_{\xi\eta}\mu\lambda-2I_{\eta\zeta}\mu\nu-2I_{\zeta\xi}\lambda\nu$$

λ,μ,ν のところに ξ,η,ζ を代入して次の式をみたす (ξ,η,ζ) で慣性楕円体を定義する

$$I_\xi\xi^2+I_\eta\eta^2+I_\zeta\zeta^2-2I_{\xi\eta}\xi\eta-2I_{\eta\zeta}\eta\zeta-2I_{\zeta\xi}\xi\zeta=1$$

(1 ではなく M のほうがいいのではないかとおもうが r の次元を変更していると考えるべき）この楕円体と OX との交点 $R=(\xi_x,\eta_x,\zeta_x)$ の $OR=r$ とすると

$$\xi_x=r\lambda,\eta_x=r\mu,\zeta_x=r\nu$$

これを上の式に代入すると

$$r^2I_{OX}=1$$

が得られる．よって

$$I_{OX}=\frac{1}{r^2}$$

となり、任意の軸に対する慣性モーメントを求められる。

$I_{\xi\eta}=0$ となるようにすると慣性主軸をえらぶ

例：質量 M 半径 R の薄い円盤のひとつの半径の中点を原点とした時の慣性楕円体を求めよ．

6.5.4 剛体の平面運動

平板（xy 平面とする）上を運動する剛体を考えよう。重心 (X, Y, Z) についての運動方程式は

$$M\frac{d^2X}{dt^2} = \sum_j F_{jx}$$

$$M\frac{d^2Y}{dt^2} = \sum_j F_{jy}$$

力は外力．このように全外力が重心に働くように重心は運動する。

そこで，重心のまわりの運動を考える。重心を原点として $G-\xi\eta\zeta$ 軸をとる。ζ 軸は平板に垂直に取る。ξ と x との角を ϕ とする。重心を原点とする座標 x_i' などとする。

z 軸のまわりの回転運動については，

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i' \times \dot{\boldsymbol{r}}_i')_z = (\sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2)\ddot{\phi}_i)$$

$$I_\zeta = \sum_i m_i(\eta_i^2 + \zeta_i^2) = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2)$$

$$I_z\frac{d^2\phi}{dt^2} = N_z' = \sum_i(x_i'F_{yi} - y_i'F_{xi})$$

$$I_\zeta\frac{d^2\phi}{dt^2} = N_\zeta' = \sum_i(\xi_i'F_{\eta i} - \eta_i'F_{\xi i})$$

などのようになる。

同様に ζ 軸のまわりの運動も同様に書ける。

例：水平面におかれた球（半径 a で質量 M、密度は一様)

中心を含み鉛直面内の水平面から l のところを撃力を与えたときの運動。滑り摩擦があるとする。摩擦係数は μ。撃力の方向を x とする。

$$M\frac{d^2X}{dt^2} = F_1(t) + F_2(t)$$

F_1 は撃力、F_2 は摩擦力。撃力によって力積 J が与えられるとする．運動量の初期値が与えられると考えて良い．

$$M\dot{X}(0) = J$$

同様に角運動量の初期値も

$$I_z \frac{d\phi}{dt}_{t=dt} = J(l-a)$$

$I_z = (2/5)Ma^2$。よって、$\dot{X}$ と $\dot{\phi}$ の初期値は

$$\dot{X}(0) = \frac{J}{M},\ \dot{\phi}(0) = \frac{J(l-a)5}{2Ma^2}$$

$$\dot{X}(0) - a\dot{\phi}(0) = J/M - \frac{J(l-a)5}{2Ma^2} = \frac{J}{M}\frac{7a-5l}{2a}$$

ここで，$-a\dot{\phi}(0)$ は水平面との接点の回転速度。

解は３とおり

1.
   - $l = 7a/5$ のとき、すべりはないのでまさつはない。
   - $l > 7a/5$ のとき、$\dot{X}(0) - a\dot{\phi}(0) < 0$ で回転の方が速いので、まさつは X 方向。

     $$M\frac{d^2X}{dt^2} = \mu Mg,\ \frac{2}{5}Ma^2\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\mu Mga$$

     初期条件を満たす解は

     $$\frac{dX}{dt} = J/M + \mu gt,\ a\frac{d\phi}{dt} = \frac{5J(l-a)}{2Ma} - \frac{5}{2}\mu gt$$

     $\dot{X} = a\dot{\phi}$ になるとき

     $$t = \frac{J(5l-7a)}{7Mga\mu}$$

     そこで滑りがやむ．以後は、滑りがないのですべり摩擦がきかず,速度は一定で

     $$\dot{X} = a\dot{\phi} = \frac{5lJ}{7Ma}$$

     でころがる。
   - $l < 7a/5$ のとき、$\dot{X}(0) - a\dot{\phi}(0) > 0$ で回転の棒がおそいのでまさつの方向は逆。

     $$\frac{dX}{dt} = J/M - \mu gt,\ a\frac{d\phi}{dt} = \frac{5J(l-a)}{2Ma} + \frac{5}{2}\mu gt$$

     $\dot{X} = a\dot{\phi}$ になるとき

     $$t = \frac{J(7a-5l)}{7Mga\mu}$$

以後は、滑りがないのですべり摩擦がきかず，速度は一定で

$$\dot{X} = a\dot{\phi} = \frac{5lJ}{7Ma}$$

でころがる。

6.6　固定点のある剛体の運動

剛体がある固定点のまわりを運動している場合を考えよう。

6.6.1　慣性テンソル

固定点を O とする。空間に固定した座標系 $O - xyz$ と剛体に固定した座標系 $O - \xi\eta\zeta$ 系とする。

各瞬間の剛体の運動は O のまわりの回転を角速度をベクトル $\boldsymbol{\omega}$ であらわす。ω は適当な方向を向いている。剛体上の各点 $\boldsymbol{r}_i$ の速度は

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \omega \times \boldsymbol{r}_i$$

これに m_i をかけて和を取ると、剛体の運動量となり、それは

$$\boldsymbol{P}_i = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \omega \times \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = \omega \times M\boldsymbol{R}$$

M は全質量、$\boldsymbol{R}$ は重心の位置ベクトル。

つぎに、O 点のまわりで ω で回転している剛体の角運動量は

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times (\omega \times \boldsymbol{r}_i)$$

たとえば

$$\boldsymbol{L}_x = \sum_i m_i (y_i(\omega \times \boldsymbol{r}_i)_z - z_i(\omega \times \boldsymbol{r}_i)_y) = \sum_i m_i (y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i))$$

$$= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)\omega_x - \omega_y x_i y_i - \omega_z z_i x_i)$$

同様に $O - \xi\eta\zeta$ では

$$\boldsymbol{L}_\xi = \sum_i m_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2)\omega_\xi - \omega_\eta \xi_i \eta_i - \omega_\zeta \zeta_i \xi_i)$$

慣性モーメントの定義から

$$\boldsymbol{L}_\xi = I_\xi \omega_\xi - I_{\xi\eta}\omega_\eta - I_{\zeta\xi}\omega_\zeta$$

他も同様にして

$$\boldsymbol{L}_\eta = I_\eta \omega_\eta - I_{\eta\zeta}\omega_\zeta - I_{\zeta\xi}\omega_\xi$$

$$\boldsymbol{L}_\zeta = I_\zeta \omega_\zeta - I_{\zeta\xi}\omega_\xi - I_{\xi\eta}\omega_\eta$$

これを行列を使ってまとめると

$$\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} & -I_{\xi\zeta} \\ -I_{\eta\zeta} & I_\eta & -I_{\eta\zeta} \\ -I_{\zeta\xi} & -I_{\zeta\eta} & I_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} \tag{94}$$

この行列を慣性テンソルという。慣性テンソルは対称行列なので対角化できる。そのように座標系を選ぶと

$$\begin{pmatrix} I_\xi^0 & 0 & 0 \\ 0 & I_\eta^0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\zeta^0 \end{pmatrix}$$

対角成分を主慣性モーメント、座標軸の方向を慣性主軸。

6.7　固定点のない場合の剛体の運動

剛体の重心にすべての力が加わっているとして重心の運動を求める。重心のまわりの剛体の運動を外力による回転として求めることができる。

例：剛体の回転の運動エネルギー。剛体が ω で回転している時は,

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega \times \boldsymbol{r}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega \cdot (\boldsymbol{r}_i \times (\omega \times \boldsymbol{r}_i))$$

$$= \omega \cdot \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{r}_i \times (\omega \times \boldsymbol{r}_i)) = \frac{1}{2} \omega \cdot \boldsymbol{L}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} & -I_{\xi\zeta} \\ -I_{\eta\zeta} & I_\eta & -I_{\eta\zeta} \\ -I_{\zeta\xi} & -I_{\zeta\eta} & I_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix}$$

と示せる。

6.8　オイラーの方程式

ベクトル $\boldsymbol{B}$ の時間変化を剛体に固定した座標系 $O - \xi\eta\zeta$ 系で表わそう．ある質点の場合を例として考える。

$$(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt})_\xi = \frac{dB_\xi}{dt} + (\omega \times \boldsymbol{B})_\xi$$

のようにふたつに分けられる。右辺第一項は $O-\xi\eta\zeta$ 系で見た時の変化、第２項は $O-\xi\eta\zeta$ 系の時間変化による分である.

剛体の角運動量は $O-\xi\eta\zeta$ 系を慣性主軸に選ぶと

$$L_\xi = I_\xi^0\omega_\xi,\ L_\eta = I_\eta^0\omega_\eta,\ L_\zeta = I_\zeta^0\omega_\zeta$$

よって

$$\begin{aligned}(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt})_\xi = \frac{dL_\xi}{dt} + (\omega\times\boldsymbol{L})_\xi &= I_\xi^0\frac{d\omega_\xi}{dt} + (\omega_\eta L_\zeta - \omega_\zeta L_\eta)\\ &= I_\xi^0\frac{d\omega_\xi}{dt} - (I_\eta^0 - I_\zeta^0)\omega_\eta\omega_\zeta\end{aligned}$$

よって

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i$$

は

$$I_\xi^0\frac{d\omega_\xi}{dt} - (I_\eta^0 - I_\zeta^0)\omega_\eta\omega_\zeta = (\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)_\xi$$

6.9 ポアンソーの定理

外力のモーメントがゼロの時の方程式

$$I_\xi^0\frac{d\omega_\xi}{dt} - (I_\eta^0 - I_\zeta^0)\omega_\eta\omega_\zeta = 0$$

と同等の式がふたつ。

それぞれに、ω_ξ 等をかけて加えると

$$I_\xi\omega_\xi\frac{d\omega_\xi}{dt} + I_\eta\omega_\eta\frac{d\omega_\eta}{dt} + I_\zeta\omega_\zeta\frac{d\omega_\zeta}{dt} = 0$$

積分すると

$$\frac{1}{2}(I_\xi\omega_\xi^2 + I_\eta\omega_\eta^2 + I_\zeta\omega_\zeta^2) = Const. = K$$

これは剛体のエネルギー。

次に、$I_\xi\omega_\xi$、$I_\eta\omega_\eta$、$I_\zeta\omega_\zeta$ をかけて和を取る

$$I_\xi^2\omega_\xi^2 + I_\eta^2\omega_\eta^2 + I_\zeta^2\omega_\zeta^2 = L^2$$

これは角運動量が一定である事を表している．一方、慣性楕円体上の点 (ξ,η,ζ) は

$$I_\xi\xi^2 + I_\eta\eta^2 + I_\zeta\zeta^2 = 1$$

ω に平行な線を O から引くと、その方向は余弦は

$$\omega_\xi/\omega, \omega_\eta/\omega, \omega_\zeta/\omega,$$

この線と慣性楕円体との交点を W として $OW = \rho$ として W は

$$\xi_W = \rho\omega_\xi/\omega, \eta_W = \rho\omega_\eta/\omega, \zeta_W = \rho\omega_\zeta/\omega,$$

これが慣性楕円体上にあることから、これらを楕円体の方程式に代入して代入して

$$1 = \frac{\rho^2}{\omega^2}(I_\xi\omega_\xi^2 + I_\eta\omega_\eta^2 + I_\zeta\omega_\zeta^2)$$

括弧内は $2K$ なので

$$\omega = \rho\sqrt{2K}$$

$1/\rho^2$ は OW のまわりの慣性モーメント I_{OW} なので

$$K = \frac{1}{2}I_{OW}\omega^2$$

この慣性楕円体と W で接する平面上の点 (ξ', η', ζ')

$$I_\xi\xi_W\xi' + I_\eta\eta_W\eta' + I_\zeta\zeta_W\zeta' = 1$$

を満たす。これは

$$I_\xi\xi d\xi + I_\eta\eta d\eta + I_\zeta\zeta d\zeta = 0$$

で $d\xi = \xi' - \xi$ などから明らか．これに、W の点

$$\xi_W = \rho\omega_\xi/\omega, \eta_W = \rho\omega_\eta/\omega, \zeta_W = \rho\omega_\zeta/\omega,$$

を代入すると

$$\frac{\rho}{\omega}(I_\xi\omega_\xi\xi' + I_\eta\omega_\eta\eta' + I_\zeta\omega_\zeta\zeta') = 1$$

$$I_\xi\omega_\omega = l_\xi$$

より

$$L_\xi\xi' + L_\eta\eta' + L_\zeta\zeta') = \frac{\omega}{\rho} = \sqrt{2K}$$

左辺は $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r}'$ これが一定なのであるから r' でつくられる平面は L と垂直。この垂線の長さを h とすると $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r}' = Lh$

$$h = \frac{\sqrt{2K}}{L}$$

$\boldsymbol{L}$ は外力が無いので一定．よって、この平面は、時間によらなずに一定。

6.10 固定点のない剛体の運動

剛体の重心にすべての力が加わっているとして重心の運動を求める。重心のまわりの剛体の運動を外力による回転として求める。こうして良い理由は運動方程式に $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$ を外積させた式から示すことができる。

外力が無い時の運動。あるいは一様重力場中の運動。外力のモーメントがゼロの時の方程式がなりたつので

$$I_\xi^0 \frac{d\omega_\xi}{dt} - (I_\eta^0 - I_\zeta^0)\omega_\eta\omega_\zeta = 0$$

と同等の式がふたつ。

これを満たす解のひとつは

$$\omega_\xi = const., \omega_\eta = \omega_\zeta = 0$$

これは，一つの慣性主軸のまわりに回転している場合である。慣性主軸なので剛体はぶれること無く回転し続ける。

次に，$\omega_\eta, \omega_\zeta$ が小さい場合を考える。この場合は，これらの２次の項を無視できるすると第一式からは $\omega_\xi = \omega_0$、第２式や第３式は

$$I_\eta^0 \frac{d\omega_\eta}{dt} - (I_\zeta^0 - I_\xi^0)\omega_0\omega_\zeta = 0$$

$$I_\zeta^0 \frac{d\omega_\zeta}{dt} - (I_\xi^0 - I_\eta^0)\omega_0\omega_\eta = 0$$

これから

$$\frac{d^2\omega_\eta}{dt^2} = \frac{(I_\xi - I_\eta)(I_\zeta - I_\xi)}{I_\eta I_\zeta}\omega_0^2\omega_\eta$$

解は振動あるいは時間とともに増加する。後者は不安定でその条件は右辺の符号から分かる。負なら振動，正なら不安定な解となる。負の条件は，たとえば，$I_\xi > I_\zeta, I_\eta$ あるいは $I_\xi < I_\zeta, I_\eta$ である。