

物質優勢期の宇宙の構造形成

岡本 崇

1 前回までのあらすじ (一様等方宇宙)

Einstein 方程式,

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

Robertson-Walker metric,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{\sqrt{1-Kr^2}} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2)$$

を用いて

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (3)$$

と,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (4)$$

を得る. ここで ρ はエネルギー密度である.

$K = 0, \Lambda = 0$ の宇宙 (Einstein-de Sitter universe) の平均エネルギー密度は, eq. (3) より,

$$\rho_c \equiv \frac{3c^2 H^2}{8\pi G} \quad (5)$$

である. 宇宙論パラメータを

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \rho, \quad (6)$$

$$\Omega_k \equiv \frac{c^2 K}{H^2 a^2}, \quad (7)$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{c^2 \Lambda}{3H^2}, \quad (8)$$

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (9)$$

と定義すると, eq. (3) は

$$\Omega - \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1 \quad (10)$$

のように書け, また減速パラメータは,

$$q = \frac{1}{2} \left(1 + 3\frac{p}{\rho} \right) \Omega - \Omega_\Lambda \quad (11)$$

となる. recombination 以降を考える場合, ダスト近似が可能であり $p = 0$ とおける. 現在の値を用いて eq (10) を書き直すと,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} - \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0} \quad (12)$$

となり, それぞれ a^{-3} , a^{-2} , と a^0 の依存性を持つことに注意*1.

*1 $\rho = \rho_m + \rho_r$ と, 物質と輻射に分けてやると, $\rho_r \propto a^{-4}$ より, $\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} - \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}$.

2 共動座標系

Newton 近似を用いる. また、以降 ρ は物質密度を表す (エネルギー密度/ c^2) ものとする. また、簡単のために宇宙定数も考えない*2. 流体近似を用いると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \Psi - \frac{\nabla p}{\rho}, \quad (14)$$

$$\Delta \Psi = 4\pi G \rho. \quad (15)$$

Euler 方程式を Lagrange 形式で書くと

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (16)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Psi \quad (17)$$

$$(18)$$

と書けることに注意. comoving 座標系

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{x}, \quad (19)$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}} \equiv H\mathbf{r} + \mathbf{u}, \quad (20)$$

を導入し, 座標変換

$$\nabla_r \rightarrow \frac{1}{a} \nabla_x, \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_r \rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x - \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{x} \cdot \nabla_x \quad (22)$$

$$(23)$$

を適用することにより (以下添字のない偏微分は x での偏微分) 連続の方程式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (24)$$

そして運動方程式は $\partial x / \partial t = 0$ に注意し、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t}(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{u}}{a} \cdot \nabla(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{u}) \\ &= \ddot{a}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{a} \cdot \nabla \mathbf{u} \\ &= -\frac{\nabla p}{a\rho} - \frac{\nabla \Psi}{a} \end{aligned} \quad (25)$$

*2 Λ 入りの場合は Poisson 方程式が $\Delta \Psi = 4\pi G \rho - \Lambda c^2$ となる.

が得られる. comoving 座標系の重力ポテンシャル

$$\Phi \equiv \frac{\Psi}{a} + \frac{\ddot{a}}{2}x^2 \quad (26)$$

を導入し,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + H\mathbf{u} + \frac{1}{a}\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{a\rho}\nabla p - \nabla \Phi \quad (27)$$

のように書いても良い. 元のポテンシャルを使って, Poisson 方程式は,

$$\Delta \Psi = 4\pi G\rho a^2 \quad (28)$$

となる.

3 線形近似

それぞれの物理量に対して微小な摂動を考える.

$$\rho = \bar{\rho} + \rho_1 \quad (29)$$

$$\mathbf{v} = \dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{u} \quad (30)$$

$$\Psi = \Psi_0 + \phi \quad (31)$$

$$p = p_0 + p_1. \quad (32)$$

3.1 Background

これらを eq. (24), (25), and (28) に代入し, まず零次の項を考えると,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3H\bar{\rho} = 0, \quad (33)$$

$$\ddot{a}\mathbf{x} = -\frac{1}{a}\nabla \Psi_0, \quad (34)$$

$$\Delta \Psi_0 = 4\pi G\bar{\rho}a^2 \quad (35)$$

となる. 連続の式は,

$$\frac{1}{a^3}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}a^3) = 0 \quad (36)$$

と変形でき, 質量保存 (断熱膨張) を示している.

運動方程式は両辺に ∇ を作用させることにより,

$$3\ddot{a} = -\frac{1}{a}\Delta \Psi_0 = -4\pi G\bar{\rho}a \quad (37)$$

となり, これは $p = 0, \Lambda = 0$ の場合の eq. (4) に一致する.

3.2 線形段階

密度がほぼ一様な状態 (宇宙初期) を考え, 一次の摂動を調べる. 密度コントラスト $\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\rho_1}{\bar{\rho}}$ を定義し ($\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$), $\delta \ll 1$ を考える. 連続の式は

$$\frac{\partial \bar{\rho}(1 + \delta)}{\partial t} + 3H\bar{\rho}(1 + \delta) + \frac{1}{a} \nabla \cdot \{\bar{\rho}(1 + \delta)\mathbf{u}\} = (1 + \delta) \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3H\bar{\rho} \right) + \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\bar{\rho}}{a} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\bar{\rho}}{a} \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) = 0,$$

ゼロ次の関係式 (33) を用い, 二次以上の摂動を無視することにより,

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\bar{\rho}}{a} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

が得られる. 同様に運動方程式は, 二次以上の摂動を無視し, ゼロ次の関係式を用いることにより,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + H\mathbf{u} &= -\frac{1}{a\bar{\rho}} \nabla p_1 - \frac{1}{a} \nabla \phi \\ &= -\frac{1}{a} \nabla \frac{c_s^2 \rho_1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{a} \nabla \phi \\ &= -\frac{c_s^2}{a} \nabla \delta - \frac{1}{a} \nabla \phi \end{aligned} \quad (39)$$

となる. ここで

$$c_s^2 \equiv \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_S, \quad (40)$$

は音速の自乗であり,

$$p_1 = c_s^2 \rho_1 + \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_\rho \delta S \quad (41)$$

となることに注意 (断熱揺らぎを考えているので $\delta S = 0$). Poisson 方程式は

$$\Delta \phi = 4\pi G \bar{\rho} \delta a^2. \quad (42)$$

eq. (39) に ∇ を作用させ, eq. (38) とその時間偏微分, eq. (42) を代入し δ のみの式

$$\ddot{\delta} = -2H\dot{\delta} + 4\pi G \bar{\rho} \delta + \frac{c_s^2}{a^2} \Delta \delta \quad (43)$$

を得る. これが δ に関する運動方程式である. 右辺第一項は宇宙膨張が摩擦項として効いていること, 第二項は重力による‘力’, 第三項は圧力によって揺らぎが上に凸の部分の成長が抑制されることを示している.

3.2.1 Jeans 波長

δ の平面波, $\exp(\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$, に比例する成分について, 分散関係を導く (\mathbf{k} , λ は comoving). eq. (43) に代入すると,

$$\omega^2 + 2H\omega - 4\pi G\bar{\rho} + k^2 \frac{c_s^2}{a^2} = 0$$

, を得る. 密度揺らぎが不安定になるための条件は $\omega > 0$ なので, この条件は,

$$k < k_J = 4\pi G\bar{\rho} \frac{a^2}{c_s^2} = \frac{3}{2} \Omega H^2 \frac{a^2}{c_s^2}, \quad (44)$$

もしくは,

$$\lambda > \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G\bar{\rho} a^2}} \quad (45)$$

が得られる. Einstein-de Sitter では $H^2 = 8\pi G\bar{\rho}/3$ なので後者は,

$$\lambda > \lambda_J \simeq \frac{c_s}{aH} \quad (46)$$

である. $a\lambda > \frac{c_s}{c} l_H$ の揺らぎが成長できることがわかる. ここで $l_H \equiv c/H$ はホライズン長である. 輻射優勢では $c_s \simeq c/\sqrt{3}$ なのでホライズンより小さなスケールの揺らぎは成長できない. equal time から recombination までの間は CDM を仮定すると $p = 0$ なので, ほぼ全てのスケールで CDM の揺らぎは成長できる. ただし, baryon に関しては圧力は輻射が支配しているため, $c_s^2 \propto a^{-1}$ となり, $\lambda_J \propto a^{-1/2}/\dot{a} \simeq \text{const.}$ となる. recombination 以降, baryon は自身の圧力 $p \propto \rho^{1+\gamma}$ を感じ, $c_s \propto \rho^{\gamma/2} \propto a^{-1}$, よって $\lambda_J \propto a^{-1/2}$ となる.

3.2.2 物質優勢期の密度揺らぎの線形成長

equal time 以降を考える. eq. (43) において $c_s = 0$ としたのが密度揺らぎの時間発展の方程式であり. 簡単のために Einstein-de Sitter universe を考える. まず, Einstein-de Sitter universe での $a(t)$ の振る舞いを調べておこう. eq. (3) に $\rho = \rho_c = \rho_{c,0} a^{-3} = 3H_0^2/(8\pi G a^3)$, $K = \Lambda = 0$ を代入することにより,

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a^{-1} \quad (47)$$

が得られる. $a = At^\alpha$ として上式に代入し, $\alpha = 2/3$ 及び $A^3 = 9/4H_0^2$ を得る. 結局,

$$a = \left(\frac{9}{4} H_0^2\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}, \quad (48)$$

$$H = \frac{2}{3} t^{-1} \quad (49)$$

となる. これらを用いると eq. (43) は,

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3} \delta t^{-1} - \frac{2}{3} \delta t^{-2} = 0 \quad (50)$$

となる. $\delta \propto t^\alpha$ と仮定して代入すると,

$$\alpha = \frac{2}{3} \text{ and } -1 \quad (51)$$

の 2 つの解が得られ, 一般解は,

$$\delta(t) = C_1 t^{\frac{2}{3}} + C_2 t^{-1} \quad (52)$$

と 2 つのモードの重ね合わせで書ける. 第一項を growing mode, 第二項を decaying mode を呼ぶ. 一般に growing mode を $D(t)$ と書き, Einstein-de Sitter (もしくは十分に高赤方偏移) では, 上記のように $D(t) \propto a(t)$ となる^{*3}.

Einstein-de Sitter 以外の場合も eq. (43) の解は解析的に求まり, growing mode, decaying mode はそれぞれ

$$D_+ \propto H \int_0^a \frac{da}{a^3 H^3}, \quad (53)$$

$$D_- \propto H \quad (54)$$

で与えられる. equal time 以後のハッブルパラメータ

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_0}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0 - \Omega_{\Lambda,0}}{a^2}} \quad (55)$$

を代入すればゆらぎの線形成長の時間変化が得られる.

3.3 特異速度場の線形成長

線形化した連続の式 eq. (38), Poisson 方程式 eq. (42), 及び, 線形段階での密度揺らぎの成長が $\dot{\delta} = \frac{\dot{D}}{D} \delta$ と書けることを利用し,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{\dot{D}}{D} \frac{\Delta \phi}{4\pi G \bar{\rho} a} \quad (56)$$

と書ける. Growth factor

$$f \equiv \frac{\dot{D}}{D} \frac{a}{\dot{a}} \simeq \Omega^{0.6} \quad (57)$$

を定義し,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{fH}{4\pi G \bar{\rho} a} \Delta \phi \quad (58)$$

と書いても良いが, 別に分かりやすくはなっていない. これは以下のように簡単に積分できる.

$$\mathbf{u} = -\frac{\dot{D}}{D} \frac{\nabla \phi}{4\pi G \bar{\rho} a} + \nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (59)$$

^{*3} なお, super horizon scale の揺らぎは相対論的取り扱いによって $D(t) \propto a^2$ となるが, 相対論抜きという方針から外れるので今回は扱わない.

ここで特異速度場の回転成分 $\mathbf{u}_T \equiv \nabla \times \boldsymbol{\omega}$ の振る舞いを調べておく。線形化したオイラー方程式 eq. (39) の rotation を取り, \mathbf{u} を代入すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{u}_T + \frac{\dot{a}}{a} \nabla \times \mathbf{u}_T \quad (60)$$

を得る。この解は,

$$\mathbf{u}_T(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{U}_T(\mathbf{x})}{a(t)}; \nabla \cdot \mathbf{U}_T = 0 \quad (61)$$

であり, $\nabla \times \boldsymbol{\omega}$ の項は decaying mode であることが分かり, 線形段階では無視しても良い。結局, 特異速度の線形成長は growing mode だけを考えて,

$$\mathbf{u} = -\frac{\dot{D}}{D} \frac{\nabla \phi}{4\pi G \bar{\rho} a} = -\frac{fH}{4\pi G \bar{\rho} a} \nabla \phi \quad (62)$$

となる*4。

3.3.1 Zel'dovich approximation

$\delta \sim 1$ になると, もはや線形近似は使えず, 非線形効果を考慮する必要がある。今までの議論はすべて Euler 座標 \mathbf{x} を用いて行っていたが, Lagrange 座標での近似は弱非線形段階 ($\delta < 3 \sim 4$) においてもかなり良い結果を与えることが知られている。この First order が Zel'dovich approximation (Zel'dovich 1970) である。

まず, Lagrange 座標 \mathbf{q} を導入することにより,

$$\mathbf{r} = a(t)[\mathbf{q} + b(t)\mathbf{s}(\mathbf{q})], \quad (63)$$

$$\text{i.e. } \mathbf{x}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{q} + b(t)\mathbf{s}(\mathbf{q}) \quad (64)$$

と書ける。ここで \mathbf{q} としては grid 上に整然と並んだようなものを思い浮かべれば良い。 $b(t)\mathbf{s}(\mathbf{q})$ は displacement を表し, \mathbf{s} は初期密度揺らぎによって与えられる。特異速度 \mathbf{u} は

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{q}) = a(t)\dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{q}) = a(t)\dot{b}(t)\mathbf{s}(\mathbf{q}) \quad (65)$$

と表される*5。

Deformation tensor,

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} + b(t) \frac{\partial s_i}{\partial q_j} \quad (66)$$

を考える。質量保存より,

$$\rho d^3x = \bar{\rho} d^3q. \quad (67)$$

*4 銀河の大規模分布の赤方偏移歪み (redshift distortion) から \mathbf{u} と δ を求め, f を通じて $\Omega^{0.6}/b$ (b は linear bias) に制限をつけるという話に繋がる。

*5 前述したように \mathbf{u} は回転成分を含まない。 $\mathbf{s} = \nabla \psi$ と, ポテンシャルを導入することによって陽にそれを表したりもする。

従って密度の時間発展は,

$$\rho = \left| \frac{d^3x}{d^3q} \right|^{-1} \bar{\rho} \equiv |\mathcal{D}|^{-1} \bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}}{\left| \delta_{ij} - b(t) \frac{\partial s_i}{\partial q_j} \right|} \quad (68)$$

で与えられる. この Jacobina, $|\mathcal{D}|$ は

$$|\mathcal{D}| = \prod_{i=1}^3 (1 - b\lambda_i) \quad (69)$$

となる. ここで λ_i は \mathcal{D} の固有値である. つまり $b(t)$ が大きくなるに従って, 固有値の大きい順, 即ち初期に潰れている方向にまず重力崩壊する. つまり膨張宇宙における構造形成は, シート, フィラメント, ノットの順に構造が作られることを意味する*6.

さて, $b(t)\mathbf{s}(\mathbf{q}) \ll 1$ に対して線形化することにより,

$$\rho = \bar{\rho}[1 - b\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{s}] \quad (70)$$

を得る. つまり,

$$\delta = -b\nabla \cdot \mathbf{s}, \quad (71)$$

なので結局 $b(t) = D(t)$ である. $\mathbf{u} = a\dot{D}\mathbf{s}$ を線形化した連続の式 Eq. (38) に代入しても, 当然ながら $\nabla \cdot \mathbf{s} = -\delta/D$ を得る*7. ちなみにこれは一次元シート系の厳密解*8.

この関係式はフーリエ変換*9

$$\delta(\mathbf{q}) = \int \hat{\delta}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} d^3k, \quad (72)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{q}) = \int \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} d^3k, \quad (73)$$

を行うことにより, $\nabla \times \mathbf{s} = 0$ より,

$$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) = i \frac{\mathbf{k}}{k^2} \frac{1}{D} \hat{\delta}(\mathbf{k}) \quad (74)$$

という簡単な関係式になる*10.

*6 本当は最初の orbit crossing が起こった時点 (ある \mathbf{q} での密度が ∞) で近似は破綻するのだが, それは言わない方向で.

*7 $\mathbf{s} = \nabla\psi$ とした場合, $\Delta\psi = -\delta/D$ という Poisson 方程式になっている.

*8 らしい.

*9 $(2\pi)^{-1}$ をどちらの変換に付けるべきかという宗教論争はひとまず置いて.

*10 これを使って powerspectrum によって与えられた密度場から粒子分布と速度分布を生成して宇宙論的シミュレーションの初期条件を作るわけだが, 最近はその辺りに落ちている public code を使う人が多い. 良い時代である. 実に嘆かわしい.

3.4 球対称解

揺らぎの成長の非線形段階 (collapse) を扱うためのモデルとして, 球対称解が存在する. 密度一定の半径 r , 質量 M の球対象な密度揺らぎを考える. 運動方程式は単純に,

$$\ddot{r} = -\frac{GM(< r)}{r^2}. \quad (75)$$

エネルギー保存より,

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM(< r)}{r} = E = \text{const}. \quad (76)$$

$E < 0$ に対する解は cycloid 曲線で与えられ^{*11},

$$r = A^2(1 - \cos \theta), \quad (77)$$

$$t = \frac{A^3}{\sqrt{GM}}(\theta - \sin \theta). \quad (78)$$

一方, $E > 0$ に対しては,

$$r = A^2(\cosh \theta - 1), \quad (79)$$

$$t = \frac{A^3}{\sqrt{GM}}(\sinh \theta - \theta) \quad (80)$$

という解が得られる.

最終的に collapse して天体が形成される場合 ($E < 0$) を考える. 球殻内の密度は $\rho = 3M/(4\pi r^3)$ である. 背景密度として簡単のために Einstein-de Sitter の場合を考えると eq. (49) より $\bar{\rho} = 1/(6\pi Gt^2)$ である. 密度揺らぎは, eq. (78) を代入することにより,

$$\delta(\theta) = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} - 1 \quad (81)$$

を得る. これを $\theta \ll 1$ のとき, θ の最少次の項まで展開すると,

$$t_L = \frac{A^3}{6\sqrt{GM}}\theta^3, \quad (82)$$

$$\delta_L(\theta) = \frac{3}{20}\theta^2, \quad (83)$$

が得られる. この 2 式から密度揺らぎの線形成長は,

$$\delta_L(t) = \frac{3}{20} \left(\frac{6\sqrt{GM}t_L}{A^3} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (84)$$

^{*11} 最速降下線の解になっている. Bernoulli がヨーロッパ中の数学者に最速降下線の問題を提出したのに対して Newton が直ちに解いて匿名で Bernoulli に解答を送ったところ, Bernoulli も解法を見てすぐに解答者が Newton であることを知ったというエピソードが有名だが凡人である我々はこのような方程式の解を見たら cycloid 曲線だと覚えておこう. 自らこの解を発見するのは大変.

球殻内の重力により、膨張はやがて止まり宇宙膨張から切り離されて収縮に転じる。 $\theta = \pi$ の時、 r は最大となり (maximum expansion) この時期を turnaround と呼ぶ。 この時期の δ は

$$\delta_{\text{ta}} = \frac{9\pi^2}{16} - 1 \simeq 4.5 \quad (85)$$

である。 一方、この時期の線形揺らぎの大きさも形式的に計算でき、

$$\delta_{\text{L,ta}} = \frac{3}{20} \left(\frac{6\sqrt{GM}t_{\text{ta}}}{A^3} \right)^{2/3} \simeq 1.06 \quad (86)$$

となる^{*12}。 つまりある redshift z_0 に揺らぎ $\delta_0 \ll 1$ を持つ領域は、

$$1 + z_{\text{ta}} = \frac{\delta_0}{\delta_{\text{L,ta}}} (1 + z_0) \quad (87)$$

となる z_{ta} に、 maximum expansion に達することが分かる。 次に、 r が再び 0 になる点 ($\rho = \infty$ and $\theta = 2\pi$) を collapse と定義すると、その時刻の線形揺らぎの大きさは、

$$\delta_{\text{L,c}} = \frac{3}{20} (12\pi) \frac{2}{3} \simeq 1.69 \quad (88)$$

となる。 この値は後で使うことになるので覚えておくこと。 この時、 $\rho = \infty$ となって密度は形式的に発散するが、実際には violent relaxation^{*13} により、 virial 平衡に達すると考えられる。 この時の半径 r_{vir} を求めておく。

turnaround 時には運動エネルギーが 0 なので系の全エネルギーは単純に

$$E = -\frac{GM}{r_{\text{ta}}} \quad (89)$$

である。 一方、 virial 平衡にある系は $2T + W = 0$ より、

$$E = T + W = \frac{1}{2}W = -\frac{1}{2} \frac{GM}{r_{\text{vir}}}. \quad (90)$$

エネルギー保存より、

$$r_{\text{vir}} = \frac{1}{2}r_{\text{ta}} \quad (91)$$

となる。 結局球の密度は turnaround 時の 2^3 倍になり、宇宙の平均密度は $\bar{\rho} = 1/(6\pi Gt^2)$ 、 $t_{\text{c}} = 2t_{\text{ta}}$ より、 turnaround 時の $1/4$ 倍になる。 つまり、

$$\Delta_{\text{vir}} \equiv \frac{\rho}{\bar{\rho}} \Big|_{\text{vir}} = 32 \frac{\rho}{\bar{\rho}} \Big|_{\text{ta}} = 32(\delta_{\text{ta}} + 1) = 18\pi^2 \simeq 178. \quad (92)$$

これが Einstein-de Sitter universe^{*14} での virial overdensity である。

^{*12} t_{ta} として、 $t_{\text{L}}(\pi)$ ではなく、 $t(\pi)$ を用いていることに注意

^{*13} 知らない人は勉強しておくこと。

^{*14} 残念ながら我々の宇宙は $\Omega_0 \neq 1$ and $\Omega_\Lambda > 0$ なのでこれをそのまま使うことはできない。 宇宙項がある場合等については例えば Nakamura & Suto (1997) を見よ。 また fitting formula が例えば Somerville & Primack (1999) で与えられていたりもする。 ちなみにどっちも Appendix.

3.5 ダークハローの質量関数

せっかく球対称解を紹介したので、質量 M の天体 (dark halos) の個数密度 $n(M)dM$ を見積もる Press-Schechter (Press & Schechter 1974) 理論を紹介する。その前に密度揺らぎの性質を整理しておく。

3.5.1 密度揺らぎの統計的性質

密度揺らぎ δ は、 $\delta \ll 1$ (宇宙初期) では通常 random Gaussian 揺らぎであったと仮定する。揺らぎの分散を $\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle$ とすると、一点分布関数は

$$f(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) d\delta. \quad (93)$$

その Fourier 変換は、以前も書いたように^{*15}

$$\hat{\delta}(\mathbf{k}) = |\hat{\delta}(\mathbf{k})|e^{i\phi(\mathbf{k})} = \int \delta(\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (94)$$

振幅の自乗平均は、power spectrum と呼ばれ、

$$P(k) \equiv \langle |\hat{\delta}(\mathbf{k})|^2 \rangle, \quad (95)$$

$$\langle \hat{\delta}(\mathbf{k})\hat{\delta}(\mathbf{k}') \rangle = P(\mathbf{k})\delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (96)$$

と定義される。ここで $\langle \rangle$ は ensemble 平均を表す。一様等方性を仮定すると $P(\mathbf{k}) = P(k)$ と書ける。二体相関関数 $\xi(r) \equiv \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}') \rangle$ とは Fourier 変換で

$$P(k) = \int \xi(r)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (97)$$

と関係付けられる。random Gaussian field は $P(k)$ (もしくは $\xi(r)$) が与えられると一意的に分布が決まる。

3.5.2 Smoothed density field: 質量揺らぎ

ある window function $W_M(\mathbf{x})$ を考える。また $\int W_M(\mathbf{x})d^3x = 1$ とする。以下の議論では球対称な window function を考え、smoothing scale R が質量 M の領域に相当するとする。つまり、

$$M \simeq \bar{\rho}R^3. \quad (98)$$

この時、mass scale M の揺らぎは、

$$\delta_M(\mathbf{x}) = \int W_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(\mathbf{x}')d^3x' \quad (99)$$

^{*15} と言いつつ、こっそりと Fourier 変換の定義が変わってる...

と表される.

Eq. (99) を Fourier 逆変換

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k, \quad (100)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} \delta_M(\mathbf{x}) &= \int W_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d^3k d^3x' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int W_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d^3x' \hat{\delta}(\mathbf{k}) d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int W_M(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{x})} d^3y \hat{\delta}(\mathbf{k}) d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int W_M(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} d^3y \hat{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{W}(kR) \hat{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \end{aligned} \quad (101)$$

と書ける. ここで,

$$\hat{W}(kR) = \int W_M(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (102)$$

は window function の Fourier 変換^{*16}である. この smoothing をかけられた場で $\delta = \delta_c$ となる点が質量 M の天体 (ダークハロー) として collapse していると考えられることができる.

良く用いられる window function は以下の 3 つである.

1. Top-hat filter

$$W_M(r) = \frac{3}{4\pi R^3} \theta\left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad (103)$$

$$\hat{W}(kR) = \frac{3}{(kR)^3} [\sin(kR) - kR \cos(kR)]. \quad (104)$$

2. Gaussian filter

$$W_M(r) = \frac{1}{(2\pi R^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right), \quad (105)$$

$$\hat{W}(kR) = \exp\left(-\frac{k^2 R^2}{2}\right). \quad (106)$$

3. Sharp k -space filter

$$W_M(r) = \frac{1}{2\pi^2 r^3} [\sin(k_c r) - k_c r \cos(k_c r)], \quad (107)$$

$$\hat{W}(kR) = \theta(k_c - k), \quad (108)$$

where $k_c \simeq R^{-1}$.

^{*16} と言いきるには e の肩の符号が微妙だが, 他に適当な呼び方も見つからない.

3.5.3 Press-Schechter mass function

以上で大體準備は完了. Mass scale M での揺らぎの分散は,

$$\sigma(M)^2 \equiv \langle \delta_M^2 \rangle = \int \hat{W}(kR)^2 P(k) d^3k. \quad (109)$$

$\delta_M \geq \delta_c$ の領域が mass scale M で collapse している. その出現確率は,

$$f(\delta_M \geq \delta_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(M)} \int_{\delta_c}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma(M)^2}\right) d\delta. \quad (110)$$

しかし, この確率に対応する領域は同じ条件を満たすより大きな領域 ($M' > M$) の内側に含まれている領域も含んでいる. これを除く必要があるので, $M \sim M + dM$ の間の collapse している天体の個数密度を $n(M)dM$ とすると, mass scale M の collapse している天体の割合は,

$$\frac{Mn(M)}{\bar{\rho}} dM = f(\delta_M \geq \delta_c) - f(\delta_{M+dM} \geq \delta_c) \simeq -\frac{\partial f(\delta_M \geq \delta_c)}{\partial M} dM \quad (111)$$

$$= -\frac{\delta_c}{\sqrt{2\pi}\sigma(M)^2} \frac{\partial \sigma(M)}{\partial M} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2}\right) dM. \quad (112)$$

ここまでは $\delta > 0$ の領域しか考慮していない. 実際に定義域は $\delta < 0$ も含むので単純に右辺を 2 倍し^{*17},

$$n(M) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}\delta_c}{M\sigma(M)^2} \frac{\partial \sigma(M)}{\partial M} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2}\right) \quad (113)$$

を得る. これが Press-Schechter (PS) mass function である. 唐突に登場した factor 2 は cloud-in-cloud problem と呼ばれ, Peacock & Heavens (1990) や Bond et al. (1991) によって解決されるまで実に 25 年近くを要した. 結論から言えば Eq. (113) は sharp k -space filter の場合には正しい. ただし, sharp k -space filter を用いた場合, smoothing scale R と mass scale M の関係は自明ではない.

経験的に得られた Sheth & Tormen (1999) mass function は N 体計算の結果と良く一致することが知られている. これは ellipsoidal collapse model にもとづいた質量関数になっているから (Sheth et al. 2001) である.

*17 $\Omega\Omega\Omega < \text{ナンダッター!}$

4 角運動量の進化

ある時刻に collapse することになる Eulerian x -space の volume V のもつ角運動量は,

$$\mathbf{L}(t) = \int_{a^3V} d^3r \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \bar{\rho} a^4 \int_V d^3x (1 + \delta) \mathbf{x} \times \mathbf{u}. \quad (114)$$

ここでは座標原点は volume V の重心にとってある. Eulerian volume V を対応する Lagrangian volume Γ に置き換えて,

$$\mathbf{L}(t) = \bar{\rho} a^5 \int_{\Gamma} d^3q (\mathbf{q} + \mathbf{S}) \times \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \quad (115)$$

ここでは Eulerian coordinates \mathbf{x} から Lagrangian coordinate \mathbf{q} への mapping

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{q} + \mathbf{S}(\mathbf{q}, t) \quad (116)$$

を用いた. この mapping $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$ の Jacobian J (where $d^3x J^{-1} = d^3q$) は質量保存により密度揺らぎと

$$1 + \delta[\mathbf{x}(\mathbf{q}, t), t] = J(\mathbf{q}, t)^{-1} \quad (117)$$

の関係にある. Eq.(115) は exact な \mathbf{L} である.

ここで Zel'dovich 近似,

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}, t) \simeq D(t) \mathbf{s}(\mathbf{q}) = D(t) \nabla \phi(\mathbf{q}) \quad (118)$$

を用いる. Eq.(115) は, first order で

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &\simeq \bar{\rho} a^5 \frac{dD}{dt} \int_{\Gamma} d^3q (\mathbf{q} + D \nabla \phi) \times \nabla \phi \\ &= \bar{\rho} a^5 \frac{dD}{dt} \int_{\Gamma} d^3q \mathbf{q} \times \nabla \phi \end{aligned} \quad (119)$$

になる. これを $\phi(\mathbf{q})$ を 0 のまわりで Taylor 展開してやり最初の三項まで考える,

$$\phi(\mathbf{q}) = \phi(0) + q_i \left. \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q}=0} + \frac{1}{2} q_i \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=0} q_j + \dots \quad (120)$$

代入すると, 第三項だけが残るので,

$$L_i(t) \simeq \bar{\rho} a^5 \dot{D} \int_{\Gamma} d^3q \epsilon_{ijk} q_j q_l \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_k \partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=0} \quad (121)$$

Potential ϕ の微分の項を

$$\mathcal{D}_{kl} \equiv \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_k \partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=0}, \quad (122)$$

inertia tensor を

$$\mathcal{I}_{jl} \equiv \bar{\rho} a^3 \int_{\Gamma} d^3q q_j q_l \quad (123)$$

とすると

$$L_i(t) = a^2 \dot{D} \epsilon_{ijk} \mathcal{I}_{jl} \mathcal{D}_{kl}. \quad (124)$$

時間依存性は

$$L(t) \propto a^2 \dot{D} \propto t, \quad (125)$$

最後は Einstein-de Sitter を仮定しているが high- z ではこれは良い近似である. 実際には turnaround 以降は tidal field から切り離されるため, 角運動量の獲得は turnaround ($\delta = \delta_{\text{ta}} \simeq 1.05$) 辺りで終わり, この Lagrange 領域は角運動量を保存しながら collapse していくと考えられる.

5 上で陽に示していない参考文献

- 長島雅弘氏、講義ノート (<http://astro.edu.nagasaki-u.ac.jp/~masa/research/NAO08/>)
- 松原隆彦氏、講義ノート (<http://www.a.phys.nagoya-u.ac.jp/taka/lectures/cosmology/>)
- P.J.E. Peebles, “The Large Scale Structure of the Universe”
- Padmanabhan, T., “Structure formation in the Universe”
- 小玉英雄 「相対論的宇宙論」