The Structure and Evolution of Stars

CONTENTS

0 はじめに — 恒星の特性と役割

太陽はギリシャの昔から炎であると考えられていた。Nicolaus Copernicus (1473 - 1543) の太陽中心説を受けて、Giordano Bruno (1548-1600) は、恒星も太陽と同じであり、見かけの違いは、ただ、距離が遠いためであると喝破した。しかしながら、炎の正体が高温の気体であることの理解は、18世紀末の Antoine-Laurent de Lavoisier の燃焼実験を待たねばならなかった。恒星は多数の原子や分子で構成されるという点では、熱力学や統計力学で扱う対象と変わりはない。違いは、その量にあり、恒星要素である原子・分子等の同士に働く重力が重要になるということである。この発見を受けて、19世紀には、高温の気体としての恒星の力学的な構造が調べられた。この構成要素に働く重力の効果が、恒星の熱力学的な振る舞いを、通常の実験室での熱力学系としての気体から類推されるものと全く異なるものとしている。この自己重力の作用の下での、物理系としての恒星の内部構造とその振る舞いを調べ、動力学的な挙動および熱力学的な特質を明らかにするのが恒星研究の最初の課題であった。

熱力学系としての恒星の特徴は、実験室の系と比べた時、境界として物質およびエネルギーを遮断する壁を持たず、本来的に環境である宇宙空間とエネルギーや物質を交換する開放系となっていることである。太陽をはじめとする恒星は主として輻射としてエネルギーを放出しているが、その放出率は非常に大きく、その誕生以来の積算は膨大な量にのぼる。一般に、物質は重力の作用で凝集されるとき重力エネルギーを熱に変換し、余剰のエネルギーを放出することができる。19世紀の終わりに Kelvin 卿は、この重力収縮によって解放されるエネルギーを恒星の供給源として提唱し、太陽の場合は数千万年にわたってそのエネルギーの消費を賄うことができることを示した。しかし、その後、Antoine Henri Becquerel によるウランの放射能の発見 (1996年) によって、地球の年代が20数億年を上回ることがわかり、必要なエネルギーは重力エネルギーを大きく超過することとなった。この太陽のエネルギーの供給に必要なエネルギーは石油などの化学エネルギーの100万倍に達し、その源が何であるかは真空の比熱の発散の問題とともに当時の物理学の２つの未解明な課題として認識されていた。

このエネルギー源の問題の解決は、Einstein の特殊相対性理論 (1905年) によってもたらされた。特殊相対性理論の帰結として、質量とエネルギーが等価であることが示され、関係式 $E = mc^2$ の公式が導かれた。Eddington 卿は水素原子４個に比べるとヘリウム原子１個の質量が 0.7 % 小さいことに着目、何らかの反応でこの sub-atomic なエネルギーを解放できれば太陽のエネルギーを十分に供給できることを提案した。あとは、1932年の Chadwick による中性子の発見による原子核の構造が確立し、その後、Bethe や Weiseker による水素からヘリウムを合成する反応過程が解明された。恒星内部の物質は圧縮されると内部は高温・高密度になるが、温度が臨界値を超えると原子核同士の反応が起き、それに伴って原子核エネルギーが熱に転換される。この核反応が、恒星を他の自己重力系天体と異なる独自の存在として特色づけるものである。

恒星内部での核反応は、ビッグ・バンによって宇宙膨張の中で生み出された非平衡状態からの原子核エネルギーの解放としての意味を持っている。それとともに、この核反応に伴って種々の原子核が合成され、これら原子核は宇宙空間に放出され、宇宙における物質の構成の多様化をもたらす。我々の住む宇宙を構成する元素は、その殆どが恒星内部での準静的な進化の過程あるいは爆発に伴う核反応の産物であり、恒星は宇宙における元素の生成機

構としての役割を担っている。したがって、恒星進化の理論とそれに基づく核種合成過程の理論は、元素の起源論の基礎となるものである。また、宇宙における構成物質の変化は、重力による物質の凝集による恒星を含む様々な天体の形成過程に影響を与える。この物質の多様化の過程を研究するのが、核種合成過程と化学進化の分野の課題である。

恒星は、宇宙における様々な物質の状態とその変化過程へのエネルギーの供給源であり、元素の合成･放出機構である。この過程は、恒星からの輻射を高温の熱源とし、宇宙膨張で冷えた宇宙空間を低温の熱浴すなわち廃熱の捨て場とする熱機関として想定され、ネゲントロピーの源としての役割を担っているである。このネゲントロピーの定着が、宇宙における物質の進化、ひいては、地球等の惑星における生命の誕生に至る進化にあたる。すなわち、恒星は、宇宙膨張に伴う相転移の過程を具現したものであり、宇宙における進化の推進機構としての役割を担っている。

1 Basic Equations

1.1 自己重力系 — Jeans 質量

構成する原子や分子の平均自由行程より大きなscaleでは、これらの粒子からなる系は、流体で近似できる。したがって、その系の状態とその運動は、下記の流体の質量保存の連続の式、運動量保存則および、エネルギー保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} P - \boldsymbol{\nabla}\phi \tag{2}$$

$$T\frac{\partial s}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})s = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{F} + \varepsilon_N - \varepsilon_\nu \tag{3}$$

で記述される。ここで、$\boldsymbol{F} = -\lambda \boldsymbol{\nabla} T$ (λ は熱伝導率)、ε_N と ε_ν はエネルギー生成率と損失率である。また、ϕ は重力ポテンシャルで、ポアソン方程式

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi = 4\pi G \rho \tag{4}$$

で与えられる。その他の記号は、通常の意味を持つ。

初期状態として一様な系を考え、摂動を加えた時の時間発展をみる。初期状態を下付きの添え字0で表し、摂動を

$$\rho\ (P, \boldsymbol{v}, \phi) = \rho_0\ (P_0, \boldsymbol{v}_0, \phi_0) + \delta\rho\ (P, \boldsymbol{v}, \phi)$$

とおいて方程式 (1) - (4) に代入、摂動の2次の項を無視すると、摂動方程式

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{v} = 0 \tag{1'}$$

$$\frac{\partial \delta\boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\delta P - \boldsymbol{\nabla}\delta\phi \tag{2'}$$

$$\delta P = c_{s,0}^2 \delta\rho \tag{3'}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\rho \tag{4'}$$

を得る。ここで、$c_{s,0}$ は初期状態の音速である $(= \partial/\rho\ |_{\mathrm{ad},0})$。式 (1') の時間微分をとり、式 (2') の空間微分、式 (3') と (4') から $\delta\boldsymbol{v}$、δP、$\delta\varphi$ を消去すると、密度の摂動 $\delta\rho$ についての方程式

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla} c_{s,0} \boldsymbol{\nabla}\delta\rho - 4\pi G \rho_0 \delta\rho = 0 \tag{5}$$

に帰着する。摂動のfourier 変換

$$\delta\rho \propto \exp(i\omega t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

を考えると、分散関係

$$\omega^2 - c_{s,0}^2 \boldsymbol{k}^2 + 4piG\rho_0 = 0 \tag{7}$$

が導かれる。これより、摂動の波数が $k < k_J \equiv= \sqrt{4\pi G\rho_0}/c_{s,0}$ のとき、ω は実数となり、摂動は振動解をもち、音波として伝播することになる。しかし、$k > k_J$ の摂動に対しては、ω は純虚数となり、摂動は、指数関数的に成長することになる。すなわち、密度と温度で決まるJeans波長とJeans質量と呼ばれる特性値

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_{s,0}\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}, \quad M_J = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)^3 \rho_0 = \sqrt{\frac{\pi^5}{36G^3}\frac{c_{s,0}^6}{\rho_0}} \tag{8}$$

が存在して、系の波長と質量がこれらの値を上回る場合、 $\delta\rho > 0$ の摂動に対しては、重力による引力の増加が圧力の反発力の増加を凌駕し、動力学的に不安定になり、重力崩壊を引き起こすことになる。この系の重力収縮は、解放された重力エネルギーが熱に転換されて圧力が増加、力のバランスが回復されるまで続くことになる。

1.2 球対称・静水平衡

自己重力の作用のもとでのガスの静水平衡構造は球対称になり、その力学的な釣り合いは

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \tag{9}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \tag{10}$$

で記述される。ここで、r は球殻の半径、 M_r は半径 r の球殻内の質量、P と ρ は球殻の圧力と密度、G は重力定数。これらの方程式は、それぞれ、連続方程式(章末note参照)および運動量方程式に対応する。質量座標 M_r を独立変数とするLagrange座標系では

$$\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{9$'$}$$

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}. \tag{10$'$}$$

ガス球内部のエントロピーの分布が与えられると、これらの方程式は閉じた系をなし、ガス球の力学的な構造が決まる。

ガス球のエントロピー分布 $s(\rho, P)$、すなわち、熱的な構造はエネルギー保存とエネルギー輸送できまる。半径 r の球殻を通過するエネルギー流束を L_r で表すと、エネルギーの保存則は

$$T\frac{\partial s}{\partial t} + \sum_i \mu_i \frac{\partial Y_i}{\partial t} = -\frac{\partial L_r}{\partial M_r} + \varepsilon_N - \varepsilon_\nu. \tag{11}$$

ここで、μ_i、Y_i はi-th 元素の化学ポテンシャルとモル濃度、また、ε_N と ε_ν は核反応によるエネルギー発生率とニュートリノによるエネルギー損失率である。ニュートリノは、中性子星のような高密度の恒星を除いて、恒星内部で発生するとガスと相互作用することなく飛散するのでエネルギー損失として扱う。

恒星内のエネルギー輸送には、radiation、convection、 conduction の3過程があり、全エネルギー流速は、光子による熱流束 $L_{\rm ph}$、対流による熱流束 $L_{\rm conv}$、伝導による熱流束 $L_{\rm cond}$ の総和

$$L_r = L_{\rm ph} + L_{\rm conv} + L_{\rm cond} \tag{12}$$

からなる。輻射による輸送は輻射平衡から

$$L_{\rm ph} = -\frac{4\pi r^2 c}{\kappa\rho}\frac{4aT^3}{3}\frac{\partial T}{\partial r}, \quad \text{or,} \quad \frac{\kappa\rho L_{\rm ph}}{4\pi r^2 c} = -\frac{\partial P_r}{\partial r}. \tag{13}$$

ここでκは物質単位質量あたりの輻射の吸収係数で、最右辺のP_rは輻射圧、aとcはradiation constantと光速である。熱伝達率$\lambda_{\rm ph}$に直すと

$$\lambda_{\rm ph}=\frac{4ac}{3\kappa\rho}T^3,\qquad (\frac{L_{\rm ph}}{4\pi r^2}=-\lambda_{\rm ph}\frac{\partial T}{\partial r}). \tag{14}$$

対流による輸送は、物質移動に伴うもので、対流の発生の条件はエントロピー勾配が負になるという次の式で与えられる。

$$\partial s/\partial r<0,\quad \text{or}\quad \nabla\equiv\frac{\partial\ln T/\partial r}{\partial\ln P/\partial r}>\left.\frac{\partial\ln T}{\partial\ln P}\right|_{\rm ad}\equiv\nabla_{\rm ad}. \tag{15}$$

この式は流体要素の仮想的な変位に伴って働く浮力から導かれるが、恒星内部の組成が一様でなく組成分布がある場合は、浮力の計算に平均分子量μの勾配を考慮しなければならないため、力学的な条件は

$$d\ln\rho=(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln P})_{T,\mu}d\ln P+(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T})_{P,\mu}d\ln P+d\ln\mu$$

となるので、

$$\nabla>\nabla_{\rm ad}+\nabla_\mu,\qquad \text{where } \nabla_\mu\equiv-\left(\frac{\partial\ln T}{\partial\ln\rho}\right)_P\frac{\partial\ln\mu/\partial r}{\partial\ln P/\partial r} \tag{16}$$

で与えられる。前者をSchwarzschild criterion、後者をLedoux criterionとよぶ*。対流の熱輸送については、混合距離理論(mixing-length-theory)がよく用いられ、

$$\frac{L_{\rm conv}}{4\pi r^2}=1/2\rho\overline{v}_{\rm conv}c_PT\frac{\Lambda}{H_P}(\nabla-\nabla') \tag{17}$$

となる。ここで、$\overline{v}$は対流要素の平均速度、c_Pは対流要素の定圧比熱、Λは混合距離、H_Pはpressure scale height ($=|dr/d\ln P|$)、また、∇'は対流要素がpressure scale height移動する間の熱輸送によるエネルギー収支を考慮した温度勾配である。

熱伝導が効くのは、一般に高密度、低温度の領域であり、恒星内部では電子が縮退して平均自由行程が長くなった場合である。熱伝導率$\lambda_{\rm cond}$は密度と温度の関数として与えられ、熱流束はそれを用いて

$$\frac{L_{\rm cond}}{4\pi r^2}=-\lambda_{\rm cond}\frac{\partial T}{\partial r} \tag{18}$$

と表せる。

対流による熱輸送も伝達率$\lambda_{\rm conv}$で表し、輻射、対流、伝導輸送の合計を$\lambda\ (=\lambda_{\rm ph}+\lambda_{\rm cond}+\lambda_{\rm conv})$とすると、

$$\frac{L_r}{4\pi r^2}=-\lambda\frac{\partial T}{\partial r}=-\lambda_{\rm ph}\frac{\partial T}{\partial r}-\lambda_{\rm cond}\frac{\partial T}{\partial r}-\lambda_{\rm conv}\frac{\partial T}{\partial r} \tag{19}$$

* 組成の勾配がある場合、$\nabla_{\rm ad}<\nabla<\nabla_{\rm ad}+\nabla_\mu$の場合は、摂動を受けた流体要素には復元力が働くので、対流は起きず、振動することになる。しかし、振動に伴い外側(内側)に変位したとき、周囲より温度が高く(低く)なり、エネルギーを失う(得る)ので、変位前の静水平衡の位置に戻ったときのエントロピーは、変位前より小さく(大きく)なり、内向き(外向き)の加速度を受けて、平衡点を通り過ぎることになる。このため、線形解析の範囲では、振動の振幅は大きくなっていくことになる。これはoverstableと呼ばれ、振幅は成長を続け、やがて、非線形効果が効いてきて、物質混合が起きて止まると考えられている。したがって、進化の時間尺度が熱伝達の時間尺度より長い場合には平均分子量の勾配がある場合でも対流に伴う物質混合の起きる条件はSchwarzschild criterionが適当と考えられている。

が第4番目の式となる。輻射輸送の式と同じ形式で書くために、熱伝達率の変わりに total opacity κ_t を

$$1/\kappa_{\rm t} = 1/\kappa + (3\rho/4acT^3)(\lambda_{\rm conv} + \lambda_{\rm cond}) \tag{20}$$

で定義し、静水平衡の式を使うと熱流束は

$$L_r = \frac{4\pi GcM_r}{\kappa_{\rm t}} \frac{4aT^4}{3P} \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log P} \right) \tag{19'}$$

で与えられる。恒星内部では一般に対流による熱輸送は効率がよいため温度勾配が断熱勾配に極めて近くなるので、対流層では熱輸送の式 (19) を解く代わりに、

$$\nabla = \nabla_{\rm ad} \tag{21}$$

の近似で代用にされる。

1.3 初期値境界値問題

連続の方程式eqs. (9'), 静水平衡の式 (10'), エネルギー保存の式 (11), 熱輸送の式 (19') の4つの方程式系は、独立変数を質量座標 M_r とすると、それぞれ、半径 r、圧力 P、熱流速 L_r、温度 T についての微分方程式を与えるが、従属変数はこれらに ρ を加えた5個なので、状態方程式を加えて閉じた系となる。

1.3.1 境界条件

4階の微分方程式に対して4個の境界条件が必要であるが、中心での条件は

$$r = L_r = 0 \quad \text{at} \quad M_r = 0$$

で与えられ、また、質量が所与のとき、表面での条件としては、

$$P = \rho = 0 \quad \text{at} \quad M_r = M$$

(radiative zero boundary condition)、あるいは

$$P = \frac{2}{3\bar{\kappa}} \frac{GM}{R^2}, \quad T = T_{\rm eff} \quad \text{at} \quad \tau = \int_R^\infty \kappa\rho dr = 2/3 \tag{22}$$

で与えられる (章末note参照)。ここで、R と L は、それぞれガス球の半径と光度 (luminosity) で、構造を解いて求まる。また、有効温度 $T_{\rm eff}$ (effective temperature) は

$$L = 4\pi R^2 \sigma_{\rm SB} T_{\rm eff}^4 \tag{23}$$

で定義され、ガス球を黒体で近似したときの表面温度をあたえる ($\sigma_{\rm SB} = ac/4$ は Stephan-Boltzmann 定数)。また、状態方程式、核反応率、熱伝達率、neutrino loss の算出には組成分布を指定する必要がある。加えて、式 (11) の時間微分の項のため、構造の初期値が必要となる。

note.1 連続の方程式

Hydrodynamical equations は

$$\partial\rho/\partial t + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{A-1.1}$$

$$\partial\boldsymbol{v}/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} = -(1/\rho)\boldsymbol{\nabla}P - \boldsymbol{\nabla}\phi, \tag{A-1.2}$$

(ϕ は重力ポテンシャル)。球対称を仮定し、Lagrangian coordinate である mass 座標

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho dr \tag{A-1.3}$$

を導入し、速度は

$$\boldsymbol{v} = (\partial r/\partial t)_{M_r} \tag{A-1.4}$$

であることを考慮すると、式 (A-1.1) の連続の方程式は、

$$\partial\rho/\partial t\mid_{M_r} + 4\pi\rho^2\partial(r^2\partial r/\partial t\mid_{M_r})/\partial M_r\mid_t = 0 \tag{A-1.5}$$

となる。この方程式は時間積分できて、

$$-(1/\rho) + 4\pi r^2\partial r/\partial M_r = \text{const} = 0. \tag{A-1.6}$$

したがって、式 (A-1.3) で定義した mass coordinate は連続方程式の解になっている。また、加速度項を無視すると式 (A-1.2) は式 (10) の静水平衡を与える。

---

note.2 恒星大気

恒星からの輻射は、恒星大気での物質との相互作用で決まり、輻射輸送の式を解いて求められる。輻射の強度 (specific intensity of radiation あるいは簡単に intensity) を I_ν とおくと、面積 $d\sigma$ の面と角度 θ をなす立体角 $d\omega$ の方向へ通過する輻射のうち、振動数 $d\nu$ あたりのエネルギーは

$$dE_\nu = I_\nu d\sigma\cos\theta dt d\omega d\nu \tag{A-2.1}$$

となる。輻射の進行方向に厚さ ds の物質を通り過ぎるとすると輻射輸送の式は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu\rho I_\nu + j_\nu\rho \tag{A-2.2}$$

となる。ここで、κ_ν と j_ν は物質の単位質量、単位振動数あたりの輻射の吸収係数と放射率である。物質による光子の吸収・放射に加えて散乱も含める。Kirchhoff's law から

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu \tag{A-2.3}$$

が成り立つ。ここで

$$B_\nu = (2h\nu^3/c^2)/[\exp(h\nu/kT) - 1] \tag{A-2.4}$$

は Plank 分布で与えられる黒体輻射の intensity で、これは、局所的に物質の温度 T が定義できることを要請することであり、local thermal equilibrium (LTE；局所熱平衡) の仮定という。恒星大気の場合、球対称なので、動径方向に座標をとり、輻射の進行方向が動径方向となす角度を θ とし、また、光学的な厚さを

$$d\tau = -\kappa\rho dr \tag{A-2.5}$$

で導入する。これらの仮定を使うと

$$\cos\ \theta dI_\nu(\theta)/d\tau = I_\nu(\theta) - B_\nu \tag{A-2.6}$$

となる。

輻射輸送の方程式を解くためにモーメントを考える。intensity のモーメントとして mean intensity J_ν、flux πH_ν、mean momentum flux K_ν を

$$\begin{aligned} J_\nu &= \int_{4\pi} I_\nu(\theta)\frac{d\omega}{4\pi} \\ \pi H_\nu &= \int_{4\pi} I_\nu(\theta)\cos\theta d\omega \\ K_\nu &= \int_{4\pi} I_\nu(\theta)\cos^2\theta\frac{d\omega}{4\pi} \end{aligned} \tag{A-2.7}$$

で定義する。それぞれ、輻射エネルギー密度、エネルギー流束、運動量流束に対応する量で、これらを用いると、輻射輸送の式 (A-2.6) から

$$\frac{1}{4}\frac{dH_\nu}{d\tau} = J_\nu - B_\nu, \quad \text{and} \quad \frac{dK_\nu}{d\tau} = \frac{1}{4}H_\nu \tag{A-2.8}$$

が得られる。この方程式を閉じさせるために、輻射の強度を上半球 $0 \le \theta \le (1/2)\pi$ と下半球 $(1/2)\pi \le \theta \le \pi$ の 2 方向の成分に分割、おのおのの平均 I_ν^+ と I_ν^- を

$$\begin{aligned} I_\nu^+ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} I_\nu(\theta)\frac{d\omega}{2\pi} \\ I_\nu^- &= \int_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} I_\nu(\theta)\frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned} \tag{A-2.9}$$

とおき、各モーメントについても、おのおのの半球でこの平均のintensityで近似して積分すると、

$$J_\nu = \frac{1}{2}(I_\nu^+ + I_\nu^-), \quad H_\nu = (I_\nu^+ - I_\nu^-), \text{ and } \quad K_\nu = \frac{1}{6}(I_\nu^+ + I_\nu^-) \tag{A-2.10}$$

とあらわせる。この関係から、

$$J_\nu = 3K_\nu$$

となり、これを上のモーメント方程式に代入すると

$$\frac{dJ_\nu}{d\tau} = \frac{3}{4}H_\nu, \text{ or } \frac{d(I_\nu^+ + I_\nu^-)}{d\tau} = \frac{3}{2}(I_\nu^+ - I_\nu^-) \tag{A-2.11}$$

となる。これと式 (A-2.6) を各半球での平均がconsistentになるようにとると

$$\frac{2}{3}\frac{dI_\nu^+}{d\tau} = I_\nu^+ - B_\nu \quad \text{and} \quad \frac{2}{3}\frac{dI_\nu^-}{d\tau} = -I_\nu^- + B_\nu. \tag{A-2.12}$$

この場合、$dH_\nu/d\tau = 3(J_\nu - B_\nu)$ となり、式 (A-2.8) の第1式を満たさないが、後で見るように、局所平衡を仮定すると、$J = B$ となり、H の微分はともに消えることになる。

以上の議論ではopacityの波長依存性を考慮して波長ごとに輻射輸送を考慮してきたが、以下では、大気の平均的な性質を見るために、波長依存性を無視して全波長で積分したものについて考える。さらに、大気は定常的であるとして、局所的に熱平衡

$$J = \int_0^\infty J_\nu d\nu = B = \int_0^\infty B_\nu d\nu \tag{A-2.13}$$

が成り立っているとする。この場合、式 (A-2.8) の第1式より $H =$ const となる。表面からの入射エネルギーがないので表面の境界条件として $\tau = 0$ では $I^- = 0$ とすると

$$\pi H = \pi I^+(\tau = 0) = \sigma T_{\rm eff}^4 = L/4\pi R^2. \tag{A-2.14}$$

また、$dJ/d\tau = (3/4)H$、かつ、黒体輻射より $\pi B = \sigma_{\rm SB} T^4$ なので、温度分布は

$$T^4 = \frac{1}{2}T_{\rm eff}^4(1 + \frac{2}{3}\tau). \tag{A-2.15}$$

これはEddington近似と称せられる。したがって、表面では $T = 0.824T_{\rm eff}$、$\tau = 2/3$ で $T = T_{\rm eff}$ となる。

恒星大気の構造を求めるには、上式を熱輸送の式 (19) の代わりに用い、連続の式、力学的な釣り合い、および、エネルギー保存の式と連立して解くことになる。通常大気でのエネルギー変動は無視できるのでエネルギー保存は $L_r = L(= \text{const})$ である。恒星が放出する平均的なphotonは $\tau = 2/3$ で作られ、$T = T_{\rm eff}$ の黒体輻射に対応することになる。この深さでの圧力は質量の変化が無視できるので $M_r = M$ とおいて静水平衡の式を積分して

$$P = \int_r^R \rho(GM/r^2)dr \simeq \frac{1}{\overline{\kappa}}\int_0^{2/3}(GM/r^2)d\tau. \tag{A-2.16}$$

ここで $\overline{\kappa}$ は平均値を表す $[= \int_{\tau=0}^{\tau=2/3}\kappa\rho(GM_r/r^2)dr/\int\rho(GM_r/r^2)dr]$。また、輻射圧は単位面積を単位時間当たりに通過する運動量であるから、$P_r = 4\pi K/c$ であり、これから輻射平衡の式が導かれ,

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{4\pi\kappa\rho}{c}\frac{dK}{d\tau} = -\kappa\rho\pi H = -\frac{\kappa\rho L}{4\pi c R^2}. \tag{A-2.17}$$

2　静水平衡の力学構造

2.1　ポリトロープガス球

流体の力学的な構造は一般に barotrope (圧力は密度のみの関数) を仮定すると、eqs. (9)、(10) は閉じた方程式系となり解ける。Polytrope は、状態方程式を

$$P = K\rho^{1+1/N} \tag{24}$$

(K, N は定数で polytropic constant と polytropic index と呼ぶ) とおいたものであるが、これは、簡単かつ物理的によい見通しを与えるという点で有用な仮定である。一般的に議論するために方程式を無次元化する。中心密度と中心圧力をそれぞれ ρ_c と P_c とし、

$$\theta = \rho/\rho_c, \quad \varpi = P/P_c \tag{25}$$

とおく。半径と質量については、それぞれ、半径係数 R_0 と質量係数 M_0 を導入して

$$\xi = r/R_0, \quad \varphi = M_r/M_0 \tag{26}$$

とおくが、これらの係数を

$$R_0 = \left(\frac{1}{4\pi G}\frac{P_c}{\rho_c^2}\right)^{1/2}, \qquad M_0 = \left(\frac{1}{4\pi G^3}\frac{P_c^3}{\rho_c^4}\right)^{1/2} \tag{27}$$

とすると、連続の式と静水平衡の式は無次元化できて

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \xi^2\theta, \quad \frac{d\varpi}{d\xi} = -\frac{\varphi\theta}{\xi^2}, \quad \varpi = \theta^{1+1/N}. \tag{28}$$

さらに $\xi' = \xi/\sqrt{1+N}$、$\theta' = \theta^{1/N}$ とおくと、2 階の常微分方程式

$$\frac{1}{\xi'^2}\frac{d}{d\xi'}\left(\xi'^2\frac{d\theta'}{\xi'}\right) = -\theta'^N \tag{28$'$}$$

が得られる。eq. (28) あるいは eq. (28′) を Lane-Emden 方程式という。

2.2　Lane-Emden 解

Lane-Emden 方程式は、polytropic index が $0 \le N \le 5$ の範囲にあるとき、表面で圧力と密度がゼロになる、すなわち、$\varpi_1 = 0$ ($\theta_1 = 0$) になる境界条件を満たす解が存在する。もうひとつの境界条件は中心 ($\xi = 0$) で、$d\theta'/d\xi = 0$ である（定義により中心では $\theta = 1$ であることに留意）。特に、$N = 0$、1、5 の場合には、解析解が存在し、

$$\begin{cases} \varpi = 1 - \xi^2/6 & \text{N=0 の場合} \\ \theta = \sin(\xi/\sqrt{2})/(\xi/\sqrt{2}) & \text{N=1 の場合} \\ \theta = [1+\xi^2/18]^{-5/4} & \text{N=5 の場合} \end{cases} \tag{29}$$

となる*。これらの中心と表面の境界条件を満たす解を Lane-Emden 解という。ポリトロープガス球の密度分布を図1に示し、特性を表1にまとめた。

*　$N = 5$ の場合は、$t = -\log\xi'$、$z = \sqrt{2\xi'}\theta'$ の変数変換をして積分する。

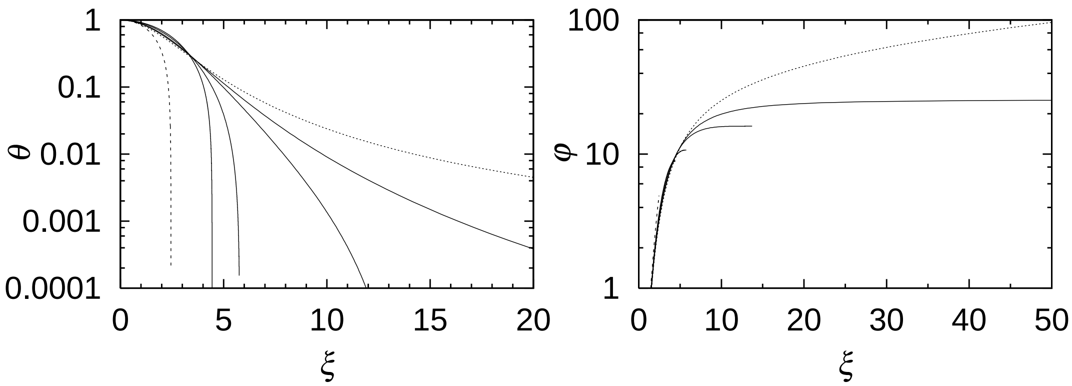

図１．ポリトロープの密度分布（左）と質量分布（右）。実線は表面半径の小さい方から $N=1$、1.5、3、5で、破線は $N=0$ の一様密度球の圧力分布。点線は $N=\infty$ の等温球の場合である。

表 1. Lane-Emden 解の特性

N	Ξ	Φ	$\rho_c/\overline{\rho}$
0	2.449	4.899	1.0
1	4.442	8.886	3.290
1.5	5.777	10.73	5.991
3.0	13.79	16.14	54.18
5.0	∞	25.56	∞

ガス球の無次元半径 Ξ、無次元質量 Φ は、$N=0$ すなわち、密度一定の非圧縮性流体のとき最も小さく、N の増加するとともに増加する。N が大きいと状態方程式が soft (密度の変化の割に圧力の変化が小さい) になり、中心から外に向かって積分すると密度が減少しても圧力の減少が小さいため、広がった構造になる。この増加の割合は、半径の方が質量より大きく、中心密度と平均密度の比 ρ_c/ρ $(=3\Xi^3/\Phi)$ は N の単調増加関数となる。特に、$N=5$ の場合は、半径 Ξ は無限大になるが、質量 Φ は有限にとどまる**。

2.3 中心密度と温度

Lane-Emden 解より、恒星の質量 M と半径 R は中心密度 ρ_c、中心圧力 P_c の関数として、

$$M = \left[\frac{1}{4\pi G^3}\frac{P_c^3}{\rho_c^4}\right]^{1/2}\Phi, \qquad R = \left[\frac{1}{4\pi G}\frac{P_c}{\rho_c^2}\right]^{1/2}\Xi, \tag{30}$$

で与えられ、これを書き直すと、質量 M、半径 R の恒星の中心密度 ρ_c、中心圧力 P_c は、

$$P_c = \left(\frac{\Xi^4}{\Phi^2}\right)\frac{GM^2}{4\pi R^4}, \qquad \rho_c = \left(\frac{\Xi^3}{\Phi}\right)\frac{M}{4\pi R^3} \tag{30$'$}$$

となる。ポリトロープの意味するところは、ガス球内部での圧力勾配と密度勾配の比が

$$\frac{d\log P/d\log r}{d\log\rho/d\log r} = \frac{N+1}{N} \tag{24$'$}$$

** $N=5$ の分布は stellar dynamics では Plummer モデルとも呼ばれる。

の関係を満たすということであるが、実際の恒星の構造と比較すると、太陽のような中心部が輻射平衡にある恒星の場合、$N \simeq 3$ がよい近似で成り立っていることがわかっている*。理想気体の状態方程式

$$P = \frac{k}{\mu m_a} \rho T \tag{31}$$

(μ、m_a、k は平均分子量、atomic mass unit、Boltzmann 定数) を適用し、太陽の質量と半径（$M_\odot = 1.99 \times 10^{33}$ g and $R_\odot = 6.9 \times 10^{10}$ cm）を式 (30′) に代入すると、中心温度と密度の推定値は

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{\mu m_a}{k} \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{\mu m_a}{k} \left(\frac{\Xi}{\Phi} \right) \frac{GM}{R} \simeq 1.2 \times 10^7 \text{ K}, \\ \rho_c &= \frac{1}{4\pi} \frac{M}{R^3} \frac{\Xi^3}{\Phi} \simeq 77 \text{ g cm}^{-1}. \end{aligned} \tag{32}$$

ガス球の中心の状態は、質量 M、半径 R に対して、理想気体の状態方程式を仮定すると静水平衡の式 (30′) で見るように

$$T_c \propto M/R, \quad \text{and} \quad \rho_c \propto M/R^3$$

で与えられる。前者は重力と圧力勾配 (重力エネルギーと熱エネルギー) との釣り合い、後者は質量保存である。これらの式から半径を消去すると

$$T_c^3/\rho_c = (\mu m_a/k)^3 (P_c^3/\rho_c^4) = (\mu m_a/k)^3 4\pi G^3 (M/\Phi)^2 \tag{33}$$

となる。したがって、質量が与えられた静水平衡のガス球の中心温度と中心密度は $T_c \propto \rho_c^{1/3}$ に沿って変化する。また、質量が大きいほど中心温度は $T_c \propto M^{2/3}$ で高くなり、あるいは、中心温度が同じであれば、$\rho_c \propto M^{-2}$ となり、大質量星ほど中心密度が小さい。中心密度と中心温度の関係は、恒星の構造にも依存し、polytropic 指数が大きい程、中心温度を与えたときの中心密度が大きくなる。

図 2 に、式 (33) から算出されるガス球の中心密度と中心温度の軌跡を恒星の進化の軌跡と比較した。水素燃焼の段階では質量によらずよく一致している。進化の軌跡も、特に、大質量星の場合はほぼ前者に沿って進む。図の $7M_\odot$ 以下の中小質量星の進化の軌跡は水素燃焼のあとで温度が下がるが、これは、後で述べるように、中心で水素が燃え尽きて水素殻燃焼の段階になると、外層が膨張してその重みが減少し、恒星の中心にかかる有効質量（中心に影響する質量）が小さくなるためである。大質量星では水素燃焼で中心に対流が発生するが、対流が起きる中心核の質量の割合が大きいためこの効果は小さい。点線は後章で述べる電子縮退が起きる条件を表したもので、これより高密度側では電子の縮退圧が優勢となり、理想気体の状態方程式が成り立たなくなる。あとで見るように、この領域にいたると恒星は冷却するか、あるいは、核反応に点火した場合は暴走することになる。

2.4　輻射の寄与と質量・光度関係

---

* エネルギー発生率に関するパラメータ $\eta = (L_r/M_r)/(L/M)$ を導入すると、熱輸送の式 (19′) は、輻射平衡の場合には

$$\frac{d}{dP} \frac{a}{3} T^4 = \frac{\kappa \eta L}{4\pi G c M}$$

となる。$\kappa\eta$ は、κ が温度が低い外層で大きくなるのに対し、エネルギー発生率は温度の高い中心部で大きくなるので、互いの変動が相殺することになる。もし、$\kappa\eta$ の空間変動が無視できる場合は、この微分方程式は積分できて、$\frac{a}{3}T^4 = (\kappa\eta L/4\pi G c M)(P - P_{\rm ps}) + \frac{a}{3}T_{\rm eff}^4$ となる。したがって、表面近くを除く $P \gg P_{\rm ps}$ and $T \gg T_{\rm eff}$ では、指数 $N = 3$ のポリトロープがよい近似になっている。

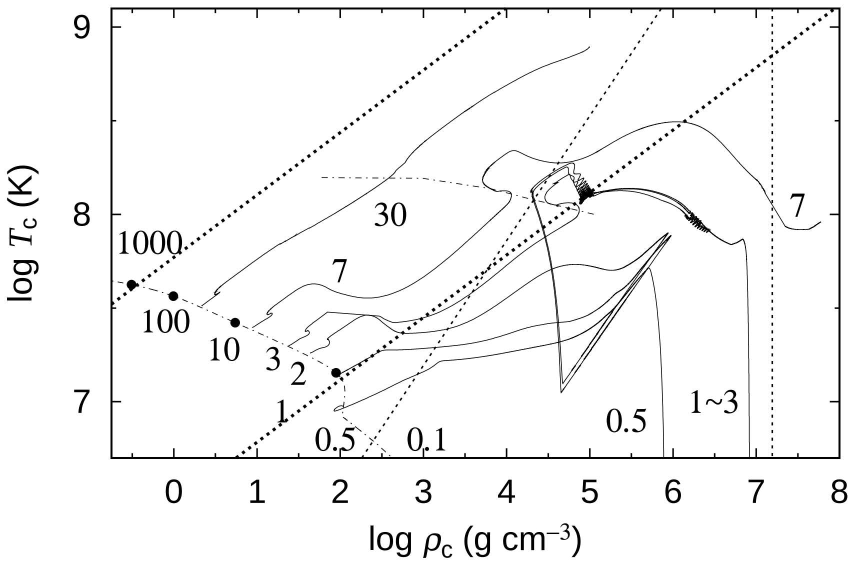

図２．ポリトロープガス球（polytropic index $N=3$）の中心密度と中心温度の軌跡（太破線; $M=1M_\odot$ と $1000M_\odot$）と恒星の進化計算の結果（実線）との比較。一点鎖線は進化計算から取った年齢ゼロの主系列星（黒丸つき）、およびヘリウム燃焼の点火段階の中心の密度と温度を表す。各線に付した数字は恒星の質量 (太陽質量 $M_\odot$ 単位) をさす。細破線は、電子が縮退する境界 ($\mu_{\rm e}=2$ のときの $\Psi=0$) および電子の運動エネルギーが相対論的になる境界（縦線）を表す (6.3.1 節参照)。

ガス球の質量が大きくなると、密度に比して温度が高くなり、輻射の効果が重要になってくる。この場合、状態方程式は理想気体の状態方程式 (31) の代わりに

$$P = P_{\rm g} + P_{\rm r} = \frac{k}{\mu m_a}\rho T + \frac{a}{3}T^4 \tag{31$'$}$$

となる。輻射の効果を表すために全圧力に占めるガス圧の割合を β で定義し、

$$\beta = P_{\rm g}/P = (k\rho T/\mu m_a)/P, \qquad 1-\beta = P_{\rm r}/P = (aT^4/3)/P \tag{34}$$

とおく。輻射を考慮しても、上記の $T_c \propto M/R$、$\rho_c \propto M/R^3$ の関係は成り立ち、

$$\frac{k}{\mu m_a}(T^3/\rho)^{1/3} + \frac{a}{3}(T^3/\rho)^{4/3} = (4\pi)^{1/3}G(M/\Phi)^{2/3}. \qquad (33').$$

式 (30) を書き直すと、

$$\frac{1-\beta_c}{\beta_c^4} = \left(\frac{\mu m_a}{k}\right)^4 \frac{4\pi a G^3}{3}\left(\frac{M}{\Phi}\right)^2 = 0.77764\left(\frac{\mu^4}{\Phi^2}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \tag{35}$$

となり、β は質量できまり、一定の値を保つことになる。ガス圧が優勢 ($1-\beta \ll 1$) のもとでは、式 (30$'$) から T_c、ρ_c とも M に比例するので、$1-\beta_c$ はガス球の質量 M の 2 乗に比例して増加することになる。輻射優勢になると、β_c は質量の $1/2$ 乗に反比例して減少することになる。太陽の場合は、$1-\beta \simeq 4.3\times10^{-4}$ ($\mu=0.6172$) とガス圧が支配的であるが、$M \gtrsim 100M_\odot$ のような大質量の恒星では輻射圧の寄与が卓越してくる。例えば、$M=100$、$1000M_\odot$ でそれぞれ $\beta=0.5634$、0.2068。輻射圧が優勢な大質量の恒星の場合、進化の軌跡 (33) は

$$T_c^3/\rho_c = (4\pi)^{1/4}(3G/a)^{3/4}(M/\Phi)^{1/2} \tag{33$''$}$$

となり、質量依存性は弱くなる。(図 2 参照)。

2.4.1 Mass-luminosity relation

ガス球の光度（luminosity）L は式（19′）で、表面近くを考えて $M_r \simeq M$ とおくと、

$$L \simeq L_{\rm Edd} \frac{\kappa_{\rm el}}{\kappa}(1-\beta)4\frac{1+N(1-\beta)}{(4-3\beta)(N+1)} \tag{36}$$

ここで、$\kappa_{\rm el}$ は電子散乱による吸収係数であり、

$$L_{\rm Edd} \equiv 4\pi GcM/\kappa_{\rm el} \tag{37}$$

は Eddington の限界光度と呼ばれ、静水平衡にある恒星の光度の上限値を与える。すなわち、恒星の光度がこの値を超えると、電子散乱による輻射圧が重力を上回り静的な平衡形状が保持できないということである。大質量星では、水素燃焼段階で中心部に対流領域が発生するが、輻射圧が優勢 $(1-\beta \simeq 1)$ なので

$$\frac{d\log P}{d\log \rho} \simeq \left.\frac{\partial \log P}{\partial \log \rho}\right|_{\rm ad} = \frac{32-24\beta-3\beta^2}{3(8-7\beta)} \simeq 4/3 \tag{38}$$

となり、内部構造は $N=3$ ポリトロープでの近似できるようになる。$N=3$ の場合は、ガス球内部で β が一定になるので、中心の値で置き換えることができる。$M \gtrsim 100 M_\odot$ の大質量星では、$1-\beta \simeq 1$ となるため、

$$L \simeq L_{\rm Edd} \propto M \tag{39}$$

となり、光度の質量にほぼ比例することになる。一方、太陽の10倍以下のような質量の恒星では、(35) より $\beta \simeq 1$、$1-\beta \propto M^2$ となるので、

$$L \propto M^3(\kappa_{\rm el}/\kappa) \tag{40}$$

となり、恒星の光度は、質量が小さくなるとともに急激に減少する。

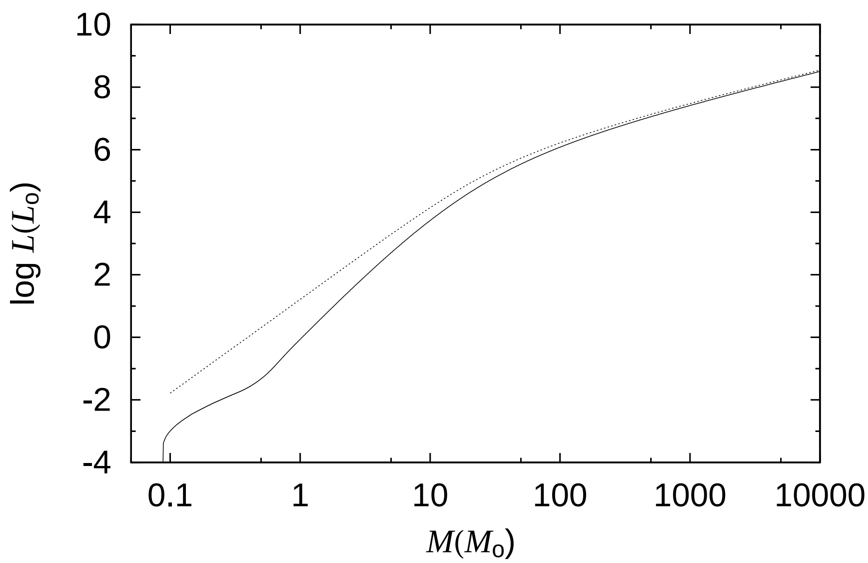

図3. ポリトロープガス球の光度の質量依存性 (点線、ただし、級数係数の変動を無視) と数値計算で求めた主系列星の質量光度関係 (実線)。

図3に中心での水素燃焼段階、すなわち、主系列に到達したとき（zero-age-main-sequence、以後ZAMSと略す）の質量と光度の関係を示したものである。上記の指数 $N=3$ のポリトロープの結果はよく主系列星の光度を再現している。特に、大質量の恒星に対してよく成り立つのは、平均温度が高く平均密度が小さいため輻射のエネルギー輸送で電子散乱が支配的であるためである。これに対して $M \lesssim 10M_\odot$ の星では、次節でみるように表面温度が下がり、また、外層の平均密度も増加するので、電子散乱によりもfree-freeや原子の吸収線の寄与が勝ってきて、吸収係数が大きくなる。このため、光度が小さくなり、質量依存性が強くなる。さらに、太陽質量以下で上記の関係からはずれて光度の質量依存が弱くなる。これらの恒星では表面温度が低く表面対流層が深くなり、ついには、中心にまで達するので、ガス球内部の熱的な構造が変り、ポリトロープ指数が $N=1.5$ の構造になるためである。

2.5 表面温度

$N=3$ のポリトロープで近似できる場合はガス球の光度は中心温度によらず上記の質量光度関係で与えられる。この質量光度関係はLane-Emden解が適用できる均一な組成分布を前提としているが、水素燃焼の主系列星の段階までは組成はほぼ一様に保たれる。一方、半径は式(30′)から $R \propto M\rho_c/P_c = M\beta_c/(kT_c/\mu m_a)$ と中心温度の減少関数なので、恒星の表面温度 $T_{\rm eff}$ (正確には有効温度)は中心温度とともに上昇する。したがって、ガス圧が優勢である低質量の恒星では

$$T_{\rm eff} = \left(\frac{16\pi}{3}\right)^{1/4}\left(\frac{\mu m_a G}{k\Xi}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{1/4} T_c^{1/2} M^{1/4} \tag{41}$$

となり、また、輻射圧が優勢である大質量星では

$$T_{\rm eff} = \left(\frac{64\pi G}{3a}\right)^{1/8}\left(\frac{\varphi}{\Xi^2}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{1/4} T_c^{1/2}. \tag{41}$$

核反応段階では、ガス球の中心温度は質量とともに若干増加するが、核反応率の温度依存性が強いため、変化量は大きくない（図2のZAMSおよびヘリウム燃焼段階参照）。中心温度の変化を別にすると、水素燃焼段階の表面温度は、低質量では質量の1/4に比例して上昇し、大質量星では質量に依らなくなる。図4にZAMSの軌跡をHR図（有効温度と光度のグラフ）に示したが、$10 \sim 100M_\odot$ に比べると $100 \sim 1000M_\odot$ の表面温度の違いが小さくなっている。

2.5.1 *Hayashi* の禁止領域

主系列星よりも中心温度が低いガス球では半径が大きく、光度は変わらないので表面温度が低いことになる ($T_{\rm eff} \propto R^{-1/2} \propto T_c^{1/2}$)。しかし、表面温度が5000度くらいより低くなると水素・ヘリウムの電離に伴う対流が深くなり、構造は $N=3$ のポリトロープとは異なってくる。

理想気体のエントロピーは

$$s = \frac{k}{\mu m_a}\ln(T^{5/2}/P) + {\rm const} \tag{42}$$

であたえられ、したがって、ガス球の中心のエントロピー $s_{\rm c}$ は

$$s_{\rm c} = \frac{k}{\mu m_a}\ln[R^{3/2}M^{1/2}(G^3\Xi^3\Phi)^{-1/2}4\pi(\mu m_a/k)^{5/2}] + {\rm const} \tag{43}$$

で、半径が大きい、すなわち、表面温度が低い程、大きくなる。また、ポリトロープを仮定するとガス球内部でのエントロピー分布は

$$s = \frac{k}{\mu m_a}\ln[K^N T^{3/2-N}(k/\mu m_a)^{N+1}] + {\rm const} \tag{44}$$

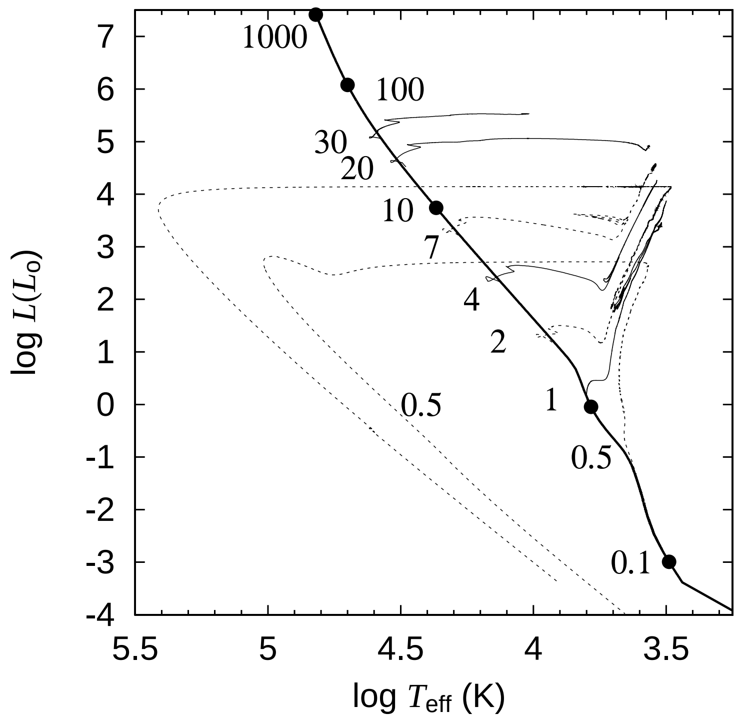

図 4. HR 図。太実線は Zero Age main sequence stars の軌跡で、その他の線はそれぞれの質量を数字で表した恒星（種族 I）進化の軌跡を表す。

となり、$N > 1.5$ の場合は中心から表面へ温度が減少するとともにエントロピーは増加する。polytrope 定数 K ($P = K\rho^{1+1/N}$) は (30) から質量と半径との間に

$$M^{N-1}R^{3-N} = (4\pi)^{-1}(K/G)^N \Xi^{3-N}\Phi^{N-1} \tag{45}$$

の関係が成り立つ。特に、$N = 3$ のポリトロープの場合、K は半径に依存せず、質量だけで決まるので、表面のエントロピー $s_{\rm surf}$ は

$$s_{\rm surf} = \frac{k}{\mu m_a} \ln[T_{\rm eff}^{-3/2}(M/\Phi)^2(\mu m_a/k)^4 4\pi G^3] + {\rm const} \tag{46}$$

となり、ガス球の半径が大きくなり表面温度が下がると表面のエントロピーも大きくならなければならない。

一方、ガス球は表面の境界条件 (22) を満たさなければならない。温度が 5000 K 以下になると水素は再結合して中性になり、吸収係数は急激に減少する。H^- イオンによる吸収が支配的になると $\kappa = \kappa_0 P T^{\alpha} (\alpha \simeq 3)$ で近似できる(電子はイオン化エネルギーの低い金属から供給される)。したがって、光球 (photosphere) の圧力 $P_{\rm ps}$ は

$$P_{\rm ps} = \left(\frac{1}{\kappa_0 T_{\rm eff}^{\alpha}} \frac{2}{3} \frac{GM}{R^2}\right)^{1/2} \tag{47}$$

となる。ただし、$\bar{\kappa} = \kappa(P_{\rm ps}, T_{\rm eff})$ で近似した。これを考慮すると表面での境界条件を満たす光球のエントロピー $s_{\rm ps}$ は

$$s_{\rm ps} = \frac{k}{\mu m_a} \ln[T_{\rm eff}^{(5+\alpha)/2} 4R/M^{1/2}(3\kappa_0/2G)^{1/2}] + {\rm const} \tag{48}$$

で $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\rm eff}^4$ が与えられれば、表面温度の増加関数ということになる。したがって、半径が大きくなり表面温度がさがると $s_{\rm surf} > s_{\rm ps}$ となり、光球のエント

ロピーを上回る表面領域で対流が発生することになる。半径の増加とともにこの表面対流層は深くなる。同時に中心のエントロピーも増加し、$s_{\rm c} \geq s_{\rm ps}$ になるとガス球全体が対流で覆われるようになる。

ガス球全体が対流になったときの構造は、輻射圧が無視できる場合は $N = 1.5$ のポリトロープで近似できる。$N = 1.5$ の場合は polytrope 定数 K はエントロピーに対応する、上の式 (45) に光球エントロピーの値を代入すると、光球と中心のエントロピーが等しいという条件から

$$L^{1/2} T_{\rm eff}^{-(7+\alpha)} M^2 = (\frac{k}{\mu m_a})^5 (\frac{\sigma}{4^3 \pi^3})^{1/2} \frac{3\kappa_0}{2G^4} \Phi \Xi^3 \tag{49}$$

と光度と表面温度の関係が導かれる。温度のベキが非常に大きいため、全体が対流である恒星では、表面温度は光度に殆ど依存しなくなり、また、質量の増加関数となる。この関係が成り立つのは、温度が下がると対流が発生しガス球が compact になること、それとともに、吸収係数の温度依存性が強いため急激に小さくなるためで、これより低温側では、輻射平衡が成り立たなくなり、恒星は静水平衡でいられない。実際、もし吸収係数が温度によらない電子散乱を仮定し、対流の発生を無視した場合には、半径によらず $N = 3$ の構造が可能になる。また、H^- イオンに必要な電子はイオン化エネルギーの小さい金属から供給されるので、金属量の小さい恒星では、κ_0 が小さくなり、票目ノン度は高くなる。

上記の関係 (49) は HR 上で恒星が存在できる表面温度の下限を表す。この境界線を林線、この低温側に林の禁止領域と呼び、静水平行な恒星は存在できないことになる。高温側では、中心のエントロピーは $K \propto R^{3/2}$ で半径が減少すると小さくなるので、表面対流層の内部に輻射平衡の中心部をもつガス球が位置することになる。恒星は図 4 に恒星進化の軌跡を示したが、低温側では進化の軌跡はほぼ一定の表面温度に集まってきて、この右側の領域には入らない。これらの進化の軌跡は恒星進化の後期の段階であり、後で見るように中心に半径の小さい中心核が存在するが、星間ガスが集まって生まれたばかり一様な組成の原始星も同様に低温側には存在できない。生まれたばかりの原始星はこの境界線の上に到達すると静水平衡になり、エネルギーを失うとともに光度を下げ、質量で決まる、主系列の高度に近い値まで下がると、中心部に輻射平衡な部分ができ、この林の禁制線を離れて高温へと進化する。

3　相似不変量による構造解析

Lane-Emden 解は単一のポリトロープで表面の自由境界条件を満たすガス球の静水平衡構造を表す。しかし、実際のガス球ではポリトロープ指数に対応する $d\log\rho/d\log P$ は内部で変化する。また、境界条件も、例えば核反応が起きている球殻で囲まれた中心部の構造を考える場合は熱浴の境界条件が適当である。これらの異なる条件に対応して、ガス球は Lane-Emden 解とは異なった形状を持つことになる。

球対称自己重力系が静水平衡のもと取りうるさまざまな形態 (morphology) を一般的に議論するには、相似変換に対して不変な量を用いた方が見通しよいことが知られている。以下のように定義される相似不変量 U、V を導入する。

$$U \equiv \frac{4\pi r^3\rho}{M_r} = \frac{d\log M_r}{d\log r} = 3\ \frac{\rho}{\bar{\rho}}, \tag{50}$$

$$V \equiv \frac{GM_r/r}{P/\rho} = -\frac{d\log P}{d\log r} = \frac{r}{H_P}. \tag{51}$$

ここで、$\bar{\rho}\ [\equiv M_r/(4\pi r^3/3)]$ は球殻内部の平均密度、また、$H_P(\equiv |dr/d\log P|)$ は pressure scale-height で、圧力が変化する球殻の厚さの尺度をあたえる。上式にも示したが、U は与えられた球殻の密度とその内部の球の平均密度の比を、および、V は球殻の重力エネルギーと熱エネルギーの比あるいはshellの厚さを半径との比で表したものである。

第一章で、エントロピー分布を与えると（例えばポリトロープを仮定すると）ガス球の力学構造は式 (9) と (10) で決定されることをみてきたが、これらの方程式は、2階の微分方程式になっている。これに対して、これらの homology invariants を用いると静水平衡の方程式は

$$\frac{d\log U}{d\log V} = -\frac{U + VN/(N+1) - 3}{U + V/(N+1) - 1} \tag{52}$$

と変換され、1 階の微分方程式に還元される。境界条件は、中心で

$$U = 3 \text{ and } V = 0 \tag{53}$$

となり、また、有限の質量が重力的に束縛された系を考えると表面は

$$U = 0 \text{ and } V \gg 1 \tag{54}$$

を満たさなければならない。

図 5 は Lane-Emden 解を $U-V$ 図上に示したものである。すべて中心で $U=3$ で、一様密度の $N=0$ の場合の解 $U=3$ を除くと、U は表面に向かって単調に減少し、$U=0$、$V \gg 1$ に延びている。Lane-Emden 解は $N=0$ の解 $U=3$ と $N=5$ の解 $2U+V-6=0$ の間に存在する。単一のポリトロープで上記の2境界条件を満たすものはLane-Emden 解に限られる。

一般的には、polytropic index N は式 (52) が積分可能である限り U と V の任意の関数であってよく、区分的に連続であれば十分である。N の変動を許せば上記の2境界条件を満たす $U-V$ 平面上の任意の曲線が内部構造の解であり

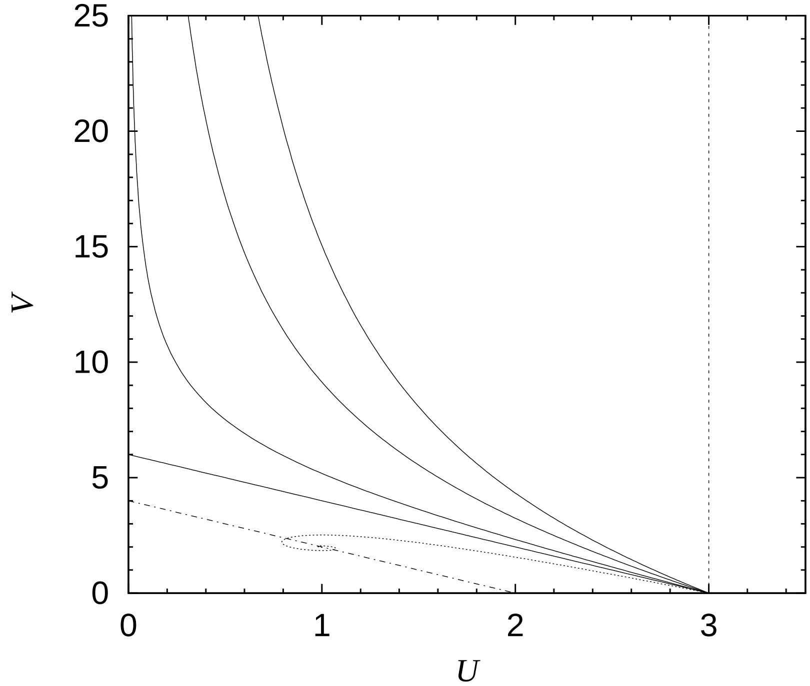

図5. $U-V$ 図上のポリトロープガス球の構造。破線は一様密度 $(N=0)$、実線は上から Polytropic index $N=1$, 1.5, 3.0, 5.0 の Lame-Emden 解。点線は等温球 $(N=\infty)$ の構造。一点鎖線は臨界線 $2U+V-4=0$

得る。この場合、むしろ、式 (52) は曲線の勾配 $d\log U/d\log V$ から N を決めるための条件となり、P と ρ の関係は

$$d\log\rho/d\log P = N/(N+1) \tag{55}$$

を積分することによって求められることになる。このような構造の実現可能性は、対応するエントロピー分布が妥当であるかどうかにかかっている。

静水平衡のもとでは、圧力はガス球内部で連続かつ微分可能でなければならない。一方、密度は組成の分布とともに不連続でありうるので、密度に依存する U、V も必ずしも連続であることを要さない。したがって、U と V も、化学組成 μ の分布が不連続であれば不連続になり、その飛びの大きさ、ΔU、ΔV は

$$\Delta\log U = \Delta\log V = \Delta\log\rho = \Delta\log\mu \tag{56}$$

で与えられる。さらに、熱輸送に要するの時間尺度に比して短い時間であれば、温度勾配は大きくなりうるので、その極限として、温度、あるいは、エントロピーの jump がある解も可能である。この場合、N は負の値にもなりうる。ただし、U/V は定義より明らかなように連続かつ微分可能でなければならない。

ガス球の構造は $U-V$ 平面の第一象限で曲線で描かれるが、polytropic index N を与えると、その振る舞いは式 (52) の分母・分子に対応して

$$g_1(U,V) \equiv U + VN/(N+1) - 3 = 0: \tag{57}$$

$$g_2(U,V) \equiv U + V/(N+1) - 1 = 0 \tag{58}$$

の2本の特性線で特徴づけられる。これらの特性線の上では、U あるいは V の増分がゼロになる。すなわち、構造線は $g_1(U,V)=0$ の線上では $dU=0$ で V 軸に平行に、$g_2(U,V)=0$ の線上では $dV=0$ で U 軸に平行に横切り、$g_1\cdot g_2>0$ の領域では負の勾配 $dU/dV<0$ を、$g_1\cdot g_2<0$ の領域では正の勾配 $dU/dV>0$ をもつことになる。$N\leq 3$ の場合は、2本の直線は第一象限で交差せず、3つの領域に区切られる。これに対し、$N>3$ の場合は、第一象限で交差し、4つの領域に分割されることになる。その交点

$$U=(N-3)/(N-1), \quad V=2(N+1)/(N-1) \tag{59}$$

は方程式 (52) の特異解であり、

$$M_r \propto r^{(N-3)/(N-1)} \qquad \rho \propto r^{-2N/(N-1)} \tag{60}$$

を与える。ポリトロープの特異解は polytropic index が $N=3$ を始点として、$N=\infty$ から $N=-\infty$ へ jump し、$N=-1$ に増加する (あるいは、$1/N+1=1/4$ から ∞ まで増加する) まで存在し、

$$2U+V-4=0 \tag{61}$$

の線上を $(U,V)=(0,4)$ から (2, 0) まで描く。この特異解の集合である臨界線は $U-V$ 平面上での構造を考える上で重要な役割を果たす。

ガス球の構造は polytropic index に依存するが、$U-V$ 上での軌跡が与えられると N が決まり、構造も決まる。したがって、半径、質量、密度分布等の物理量を N に依存しない形で表すことが可能である。U、V の定義式の微分から N を消去すると

$$d\log r = \frac{d\log(V/U)}{2U+V-4} \tag{62}$$

となり、N を陽にもちいることなく $U-V$ 平面上の軌跡から半径を求めることができる。同様に、質量と密度についても

$$d\log M_r = \frac{U d\log(V/U)}{2U+V-4} \tag{63}$$

$$d\log P = -\frac{V d\log(V/U)}{2U+V-4} \tag{64}$$

となる。密度分布は質量と半径から求まる。これらの右辺の分母には上記の臨界線が現れる。構造線が $U-V$ 平面上でこの臨界線の近づくと、ガス球の半径が急激に増加することになる。このことは、Lane-Emden 解で N が増加すると半径が増加することにも表れている。同時に質量も増加するが、分子に U がかかっているので、U の小さなところではその効果は小さく、半径に比して増加の割合が押さえられることになる。

半径、質量、圧力は連続関数なので、上の微分式からわかるように、構造線が臨界線（61）を横切るときは、$d\log(V/U)=0$ でなければならず、また、左辺はガス球内部で単調関数なので、V/U の増減は分母の符合によって逆になる。中心は臨界線の上部 $2U+V-4>0$ の領域にあり、V/U は中心の $V/U=0$ から表面の $V/U\to\infty$ に向けて半径とともに増加する。しかし、構造線が臨界線を横切って $2U+V-4<0$ の領域に入ると、半径の増加に伴い V/U は減少するようになり、折り返すことになる。表面の境界条件を満たすためには、再び $d\log(V/U)=0$ で臨界線を横切り、その上部に出ねばならず、$U-V$ 面上でループを持つことになる。

Lane-Emden 解は臨界線の上部領域 $2U+V-4>0$ のみを走り、中心から表面まで V/U が単調に増加する。これに対して、ガス球内部での polytropic index の変動を許すと表面と中心の境界条件を満たし、かつ V/U が極値をもち、$U-V$ 平面上でループを持つ構造が可能となる。以下で、まず、単純なポリトロープの場合の相似不変量面上での解の振る舞いについて調べ、次いで、進化の後期の赤色巨星構造を理解するうえで重要であるループを持つ構造を double polytrope を例として調べる。

3.1 単一ポリトロープ

ガス球内部の状態方程式が単一の polytropic 指数で記述される最も単純なポリトロープでは、先に議論した Lane-Emden 解がある。これは、中心と表面との両境界条件を満たす解であるが、この条件を緩めると Lane-Emden 解を持つ $0\le N\le 5$ 以外の index に対しても静水平衡 (52) の解が可能である。中心での境界条件を考慮して $U=3$ のまわりで展開すると

$$U = 3 - \frac{3N}{5(N+1)}V - \frac{3N(N-5)}{7\cdot 25(N+1)^2}V^2. \tag{65}$$

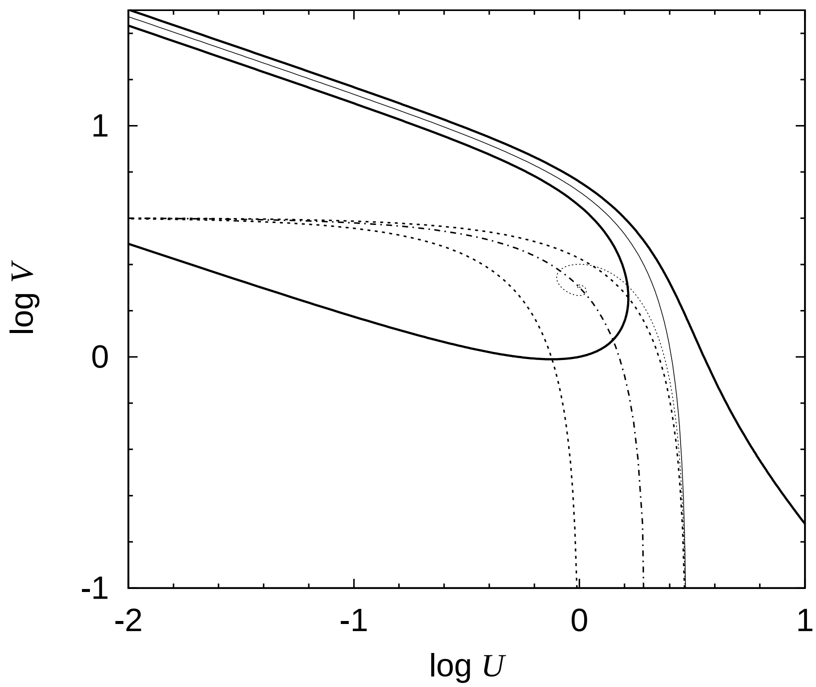

図6. $U-V$ 図上でのさまざまなポリトロープガス球の静水平衡の解とLane-Emden解の比較（細実線）。太実線は表面条件を満たすcondensed型とcollapsed型（Polytropic index $N=3$ の場合）であり、点線は中心条件を満たす等温解（$N=\infty$）。破線と一点鎖線はそれぞれ式(58)の特性線と(61)の臨界線を表す。等温解は臨界線上にfocus pointを持つ。

したがって、$N>5$ (N が負の場合も含めると $1/N+1<1/6$) の場合、中心での境界条件を満たすものは $N=5$ のLane-Emden解 $2U+V-6=0$ と $V=0$ の間を通って、臨界線（52）上の特異解に反時計回りに漸近することになる。これらの解は、$N\geq 5$ の範囲での特異解は $U\geq 0.5$ のため、表面の境界条件は満たさない。図5に例として等温球 ($N=\infty$) の構造を示した。この解は中心から表面に向かって積分すると、臨界線上の特異解 $(U,V)=(1,2)$ の周りを渦巻きながら近づいていく。この点は $\rho\propto r^{-2}$、$M_r\propto r^{-1}$ の等温特異解に対応している。

これとは逆に、表面の境界条件を満たす解は、Lane-Emden解以外は中心の境界条件を満たすことができない。図6にこれらの解の例をいくつか示したが、Lane-Emden解を境として、表面で U の大きい側を走るものと小さい側を走るものに分かれる。前者の場合、表面から内部に向かって積分すると、Lane-Emden解に比べて質量の被積分関数は常に大きくなるため、質量の変化率が大きく、有限の半径で $M_r=0$ となる。すなわち、$V=0$ の中心に到達する前に $U\to\infty$ となる。この解は中空の構造を表し、中心崩壊型（centrally-collapsed type）の解と呼ばれる。一方、表面での V の値をLane-Emden解より小さくとり中心に向かって積分すると、逆に、Lane-Emden解より質量の変化率が小さいため、半径が $r=0$ となっても有限の質量 M_r が残ることになる。これは、中心に点状の重力源が存在することを意味し、この解は、中心集中型（centrally-condensed type）とよばれる。$r\to 0$ での振る舞いは、まず、$g_1=0$ を縦断すると U が増加から減少に転じ、さらに、$g_2=0$ を横断すると、V が減少から増加に転じる。このため、V は中心に近づいても有限の値にとどまることになる。その後の振る舞いは、polytropic index N の値によって異なる。$N\leq 3$ の場合は、$U\to 0$ とともに V は増加して $N+1$ に漸近していく。一方、$N>3$ の場合は、上述の特異解に時計回りに渦巻きながら漸近していくことになる。

中心崩壊型、中心集中型の解は、単一のポリトロープとしては恒星の境界条件を満たすことはできない。しかし、異なるpolytropic indexの多成分を連結することによって、中心と表面の境界を条件を満たすことが可能である。特に、中心集中型の場合は、進化して凝縮した中心核を持つ場合の外層の構

造に対応することになる。

3.2 Double Polytrope

Lane-Emden解は$U-V$面上では中心から表面までV/Uが単調に増加、交差しない曲線で表されるが、これ以外にも恒星内部でV/Uが複数の極値をもち、ループを描く曲線で表される解が可能である。ループの数は原理的にはいくつでもよいが、ここでは、one loopの構造を与えるDouble polytropeを例として考える。

Double polytropeは異なるpolytropic状態方程式(polytropic constantとpolytropic indicesの一方あるいは両方が異なる)に従う2成分からなる系であり、密度と圧力は2成分の総和で与えられるとする。したがって、状態方程式は、

$$\begin{aligned} &P = P_1 + P_2 \quad : \quad \rho = \rho_1 + \rho_2, \\ &P_1 = K_1 \rho_1^{1+1/N_1}, \quad P_2 = K_2 \rho_2^{1+1/N_2}. \end{aligned} \tag{66}$$

また、静水平衡の方程式(9)(10)も各成分に毎に分解できて、それぞれ、

$$\begin{aligned} dm_1/dr = 4\pi r^2 \rho_1 \qquad dP_1/dr = -\rho_1 G(m_1+m_2)/r^2 \\ dm_2/dr = 4\pi r^2 \rho_2 \qquad dP_2/dr = -\rho_2 G(m_1+m_2)/r^2 \end{aligned} \tag{67}$$

と書けるとする。この仮定は各成分は重力を通してのみ相互作用している場合と同じになる。これらの式をポリトロープの場合と同様に、それぞれの成分の中心密度$\rho_{1,c}$と$\rho_{2,c}$と中心圧力$P_{1,c}$と$P_{2,c}$を用いて無次元化する。密度に関しては、

$$\rho_1 = \rho_{1,c}\theta_1 \quad : \quad \rho_2 = \rho_{2,c}\theta_2 \tag{68}$$

とするが、半径と質量に関しては共通の半径係数と質量係数を用いて、

$$m_1 = M_0'\varphi_1' \quad : \quad m_2 = M_0'\varphi_2' \quad : \quad r = R_0'\xi' \tag{69}$$

とおく。ここでは、成分1の分布に注目するので、半径係数と質量係数としては成分1の値を採用し、

$$R_0' = \left[\frac{(1+1/N_1)}{4\pi G}\frac{P_{1,c}}{\rho_{1,c}}\right]^{1/2}, \qquad M_0' = \left[\frac{(1+1/N_1)^3}{4\pi G^3}\frac{P_{1,c}^3}{\rho_{1,c}^4}\right]^{1/2} \tag{70}$$

を用いる。一成分系の場合の式(30)の定義とはおのおの$(1+1/N)^{1/2}$、$(1+1/N)^{3/2}$の係数だけ異なる。さらに、2成分の関係を与えるパラメータ、αとβ、として2成分の中心での密度比と熱エネルギー比を採用し、それぞれ、

$$\alpha = \frac{\rho_{2,c}}{\rho_{1,c}} \quad : \quad \beta = \frac{(1+1/N_2)P_{2,c}/\rho_{2,c}}{(1+1/N_1)P_{1,c}/\rho_{1,c}}. \tag{71}$$

とおく。これらを代入すると、無次元化方程式は、各成分について、

$$\frac{d\theta_1}{d\xi'} = -\frac{(\varphi_1'+\varphi_2')\theta_1^{1-1/N_1}}{\xi'^2} : \quad \frac{d\theta_2}{d\xi'} = -\frac{1}{\beta}\frac{(\varphi_1'+\varphi_2')\theta_2^{1-1/N_2}}{\xi'^2} \tag{72}$$

$$\frac{d\varphi_1'}{d\xi'} = \theta_1\xi'^2 : \quad \frac{d\varphi_2'}{d\xi'} = \alpha\theta_2\xi'^2 \tag{73}$$

となる。したがって、この系はpolytropic indicesを与えても、構造は2成分の密度および熱エネルギーによってさまざまな形態をとることになる。系の境界条件としては、中心で

$$\theta_1 = \theta_2 = 1 \quad : \quad \varphi_1' = \varphi_2' = 0 \quad \text{at} \quad \xi' = 0, \tag{74}$$

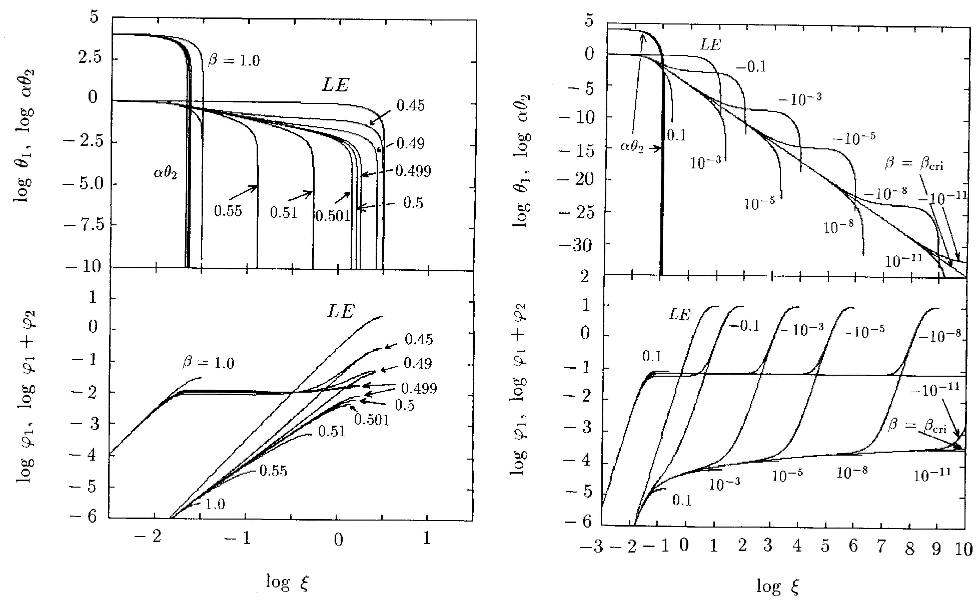

図 7. Double polytrope の各成分の密度分布 (上) と質量分布 (下)。左は $N_1 = N_2 = 1$ 右は $N_1 = N_2 = 3$ の場合。ともに $\alpha = 10^4$、各線に付記した数値は β (左) と $\beta - \beta_{\rm cri}$ (右図) の値を表す。LE と記した線は中心密度が成分1と同じ Lane-Emden 解を表す (Fujimoto & Tomisaka 1992)。

である。表面は

$$P = 0, \quad \text{あるいは} \quad \theta_1 = \theta_2 = 0 \tag{75}$$

で与えられるが、各成分の表面 (密度が消える半径) は必ずしも一致しない。式 (72) の力学的な釣り合いの式は $\varphi_1 + \varphi_2$ を消去することによって積分できて、

$$N_1 \theta_1^{1/N_1} - \beta N_2 \theta_2^{1/N_2} = N_1 - \beta N_2 \tag{76}$$

したがって、成分間の広がりの関係は中心での熱エネルギーの比で決まる: $\beta = N_1/N_2$ のときは $\theta_1^{1/N_1} = \theta_2^{1/N_2}$ となり、2成分の表面は一致、$\beta > N_1/N_2$ のときは第1成分の半径が、$\beta < N_1/N_2$ のときは第2成分の半径が小さくなり、熱エネルギーの大きな成分 (hotter c0mponent) が熱エネルギーの小さな成分 (cooler component) を包み込むことになる。i-th 成分の密度がゼロになれば、その成分については $\theta_i = 0$、$\varphi_i = \text{const}$ とおいて、残りの成分について、式 (72)、(73) を積分し、上記の境界条件を満たしたところが複合系の表面となる。

図 7 に $\beta < N_1/N_2$ のときの2成分系の構造を例示した。β の減少、すなわち、成分1の熱エネルギーが（成分2に比して）大きくなるとともに、成分1の半径は (成分2に比して) 大きくなる。特に、cooler 成分 (=成分2) の中心密度が大きい $\alpha \gg 1$ の場合は、その表面近くでは $\phi_2 \gg \phi_1$ で cooler 成分が重力では支配的なので、その外側での hotter 成分 (=成分1) の分布は

$$\theta_1 = \left[1 - \frac{N_2\beta}{N_1} + \frac{\Phi_2'}{N_1 \Xi_2'} \left(\frac{\Xi_2'}{\xi'} - 1\right)\right]^{N_1}. \tag{77}$$

となる。ここで、Ξ_2'、Φ_2' は cooler 成分の表面半径と全質量であるが、この場合、$\xi' \le \Xi_2'$ では、hotter 成分の質量の寄与は無視できるので、cooler 成分の構造は Lane-Emden 解で近似でき、半径係数と質量係数の違いを考慮すると、$\Xi_2' = (\beta/\alpha)^{1/2} \Xi_{\rm LE}'(N_2)$ $\Phi_2' = (\beta^{3/2}/\alpha^{1/2}) \Phi_{\rm LE}'(N_2)$ で近似できる (ただし、$\Phi_{\rm LE}'(N_2)$、$\Xi_{\rm LE}'(N_2)$ は Lane-Emden 解の質量と半径)。したがって、cooler 成分の表面重力で決まる β の特性値 $\beta_{\rm cri}$

$$\beta_{\rm cri} = N_1/[N_2 + \Phi_{\rm LE}'(N_2)/\Xi_{\rm LE}'(N_2)] \tag{78}$$

が与えられ、$\alpha \gg 1$ の場合、$N_1 = N_2 = 1$ から 3 のとき $\beta_{\rm cri} = 0.5$、から 0.7735 に増加、また $(N_1, N_2) = (3, 1.5)$ の場合は $\beta_{\rm cri} = 1.1475$ になる。$\beta \simeq \beta_{\rm cri}$ のとき、式 (77) はベキ分布

$$\theta_1 \simeq [1 - \beta_{\rm cri} N_2/N_1]^{N_1} (\xi/\Xi_2)^{-N_1} \tag{77$'$}$$

となる。Lane-Emden 解のように自己重力の場合には表面に近づくと密度は指数関数的に急激に減少する。これに対し、2 成分系の場合は、cooler 成分による外部重力の影響の下では、hot component の密度はベキ分布になり、減少が遅いため大きな半径がまで広がることになる。Lane-Emden 解と比較すると、$N_1 = 1$ の stiff な状態方程式の場合には、同じ半径までしか達しないが、$N_1 = 3$ のように soft な状態方程式の場合は、対応する Lane-Emden 解の半径を超えて大きく膨れた構造が可能となる。これは、上記のベキ分布の適用条件が $M_2 \gg m_1$ で自己重力が無視できるためで、したがって、自己重力が効いてくる (hotter 成分の質量が cooler 成分の質量と同等になる) 半径 $\xi'_{\rm sg}$

$$\int_{\Xi'_2}^{\xi'_{\rm sg}} \theta_1 \xi'^2 d\xi' \equiv \frac{\beta^{3/2}}{\alpha^{1/2}} \Phi'_{\rm LE}(N_2) \tag{79}$$

が適用の上限を与える。この式に上記のベキ分布の式 (77$'$) を代入すると、N_1 が大きく、状態方程式が soft な場合は、圧力に比して密度の減少が大きく、適用可能な半径が大きくなる。とりわけ、$N = 3$ の場合は右辺が対数積分になり、$N_1 > 3$ ではこの意味での適用限界はなくなる。

下図は質量分布を示したものである。$\beta > \beta_{\rm cri}$ のときは、式 (77) からわかるように

$$\xi'_1 = \xi'_2 \frac{\beta[1 - (N_2/N_1)\beta_{\rm cri}]}{\beta - \beta_{\rm cri}} \tag{80}$$

で半径が限られ、質量も $M_1 \ll M_2$ となる。これは高密度の中心核の周りを薄い envelope が取り巻く構造に対応する。β が減少する (すなわち hotter 成分の熱エネルギーが増加する) とともに、半径が増加し、同時に envelope の mass も増加し、$\beta_{\rm cri}$ に近づくと $M_1 \simeq M_2$ となり、最大半径 $\Xi_{\rm sg}$ に達する。$\beta < \beta_{\rm cri}$ では hotter 成分の熱エネルギーが増加 (β が減少) すると逆に半径は減少することになる。この場合も hotter 成分の質量は増加を続ける。図 7 の $N = 3$ の場合に顕著であるが、密度分布 (77) で ξ/Ξ_2 が大きくなると θ_1 は停留値 $(1 - \beta/\beta_{\rm cri})^{N_1}$ を持つことを使うと、hotter 成分の半径と質量は

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= \left(\frac{\beta_{\rm cri}}{\beta_{\rm cri} - \beta}\right)^{(N_1-1)/2} \Xi'_{\rm LE}(N_1) \\ \varphi'_1 &= \left(\frac{\beta_{\rm cri} - \beta}{\beta_{\rm cri}}\right)^{(3-N_1)/2} \Phi'_{\rm LE}(N_1) \end{aligned} \tag{81}$$

で評価できることになる。これらの構造は、中心部の高密度の cooler 成分とそれを取り囲む低密度の hotter 成分の 2 つの Lane-Emden 解が重ね合わせになっている。その際、後で見るように、cooler 成分の表面近く、密度は cooler 成分が勝っているが、圧力は hotter 成分が支配する緩衝地帯ができ、その外側で、hotter 成分について cooler 成分の重力に支配されたベキ分布が実現する。そのため、外側の hotter 成分については、Lane-Emden に対応する密度は小さくなり、中心密度に対応するものに比して半径が大きくなるということである。さらに、β が減少するとやがて、Lane-Emden 解に漸近することになるが、これは、hotter 成分の熱エネルギーが増加して、cooler 成分のつくる重力ポテンシャルを大きく上回るようになり (すなわち、$1/\beta \gg \Phi'_2/\Xi'_2$)、その影響が無視できるためである。

図 8 に、double polytrope の $U-V$ curve および圧力と polytropic index の分布を示した。cooler 成分の表面に近づくと急激に密度が減少するが、圧力は hotter 成分に支配され殆ど変化しない。このため、外に向けてエントロピーは急勾配で増加、U、V とも小さくなる。この後の振る舞いは、β と $\beta_{\rm cri}$ の大小で変わってくる。

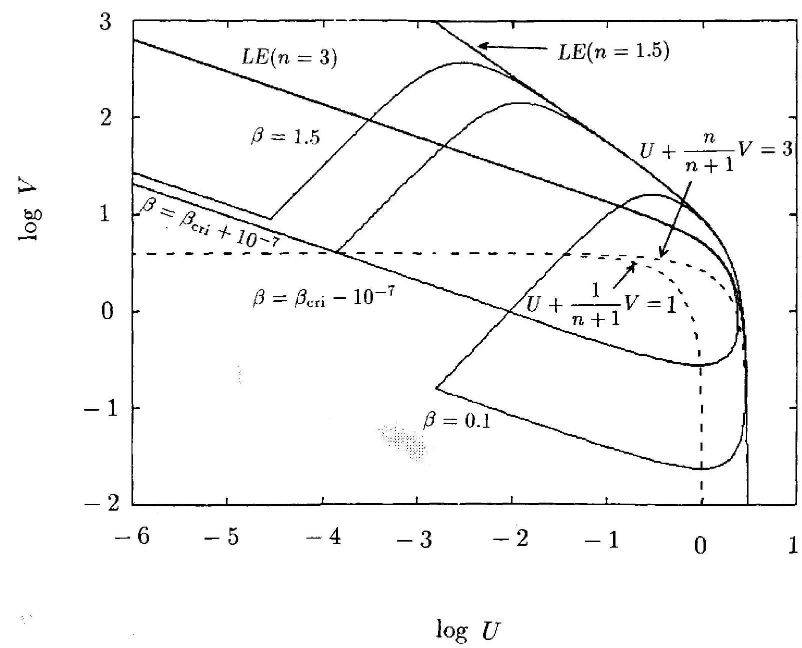

図8. Double polytrope ($N_1 = 3$、$N_2 = 1.5$) の $\log U - \log V$ 図上での振舞い。$\alpha = 10^4$ で β の値は各線に付記した。LEと記した線はpolytropic index N の Lane-Emden 解を表す。破線は特性線を記す (Fujimoto & Tomisaka 1992)。

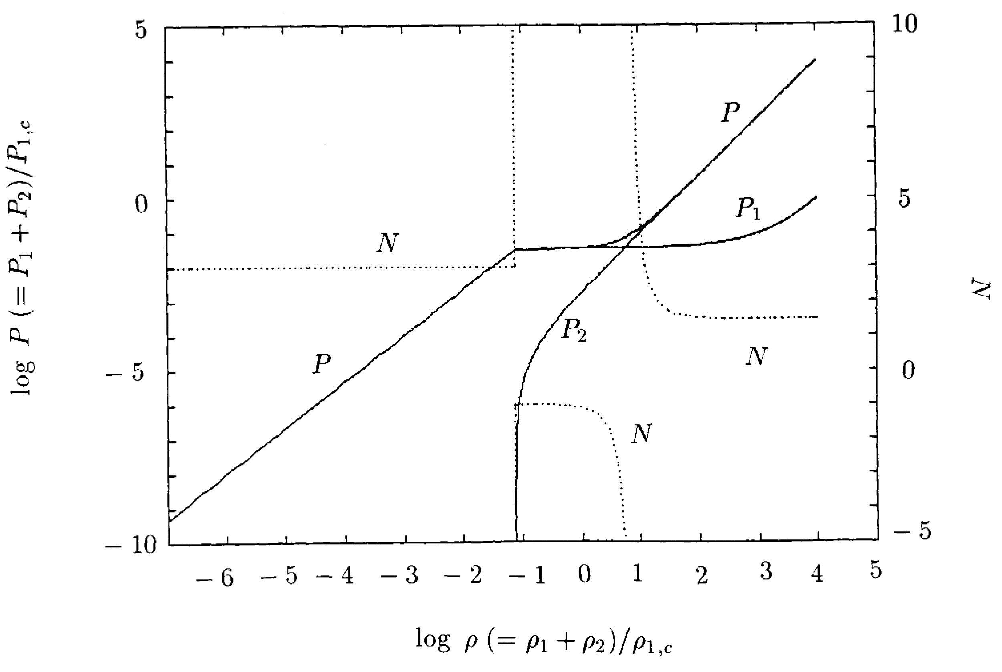

図9. Double polytrope の内部の圧力と polytropic index N の分布。モデルは図8と同じ、$N_1 = 3$、$N_2 = 1.5$、$\alpha = 10^4$ で、$\beta = \beta_{\rm cri} - 10^{-7}$。polytropic index の分布は、中心の $N = 1.5$ と表面の $N = 3.0$ に加えて、N が大きくあるいは負になる $1/(N+1) < 1/6$ の遷移層がある (Fujimoto & Tomisaka 1992)。

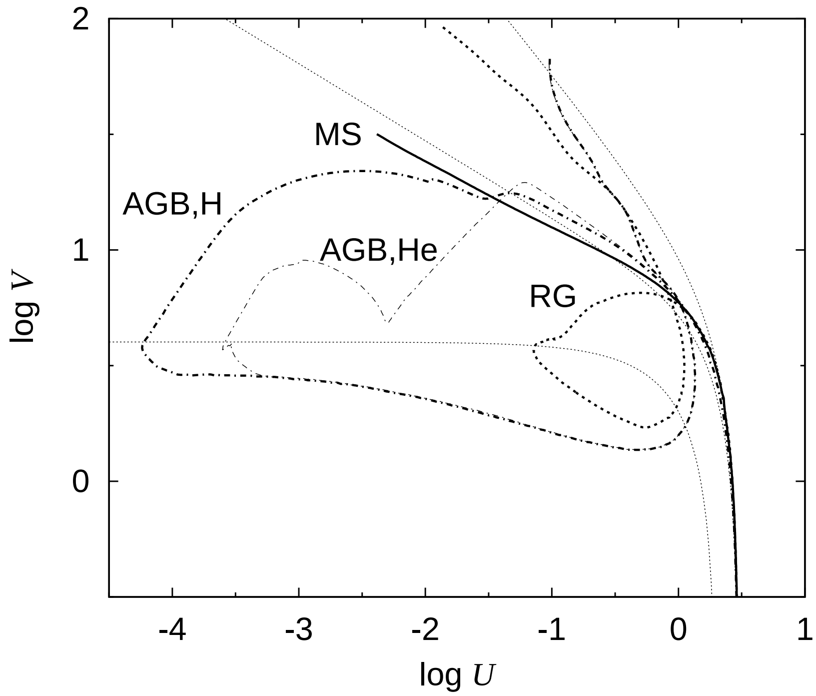

図 10. 恒星の $\log U - \log V$ 図上での構造。MS、RG、AGB,H、AGB,He はそれぞれ、主系列段階、赤色巨星分枝段階、水素殻燃焼およびヘリウム殻燃焼が主要なエネルギー供給源となっている漸近巨星分枝段階の恒星内部の構造を表す。赤色巨星以降はループ構造をとる。

(i) $\beta > \beta_{\rm cri}$ の場合: cooler 成分の外側のベキ分布では、$U \propto r^3\rho \propto r^{3-N_1}$、$V \propto \rho/Pr \sim$ const となり、この場合 $(N=3)$ は一点に留まり、半径が膨張する。表面 $\xi = \Xi_1$ が近づくと $U \sim V^{-3}$ に従って U が減少し、V が増加して、表面条件 $U/V \to 0$ に近づいていく。

(ii) $\beta < \beta_{\rm cri}$ の場合: ベキ分布での停留点で半径を膨張させた後、U は増加に転じ (V は $UV^3 \sim$ const で減少)、ループを描いて、臨界線の上方に出て、Lane-Emden 解に漸近していく。構造線が臨界線を下から上に横切るところは U が大きいので質量が増加する。

図 9 に Double polytrope の圧力分布を示した。中心部での圧力は、高密度の cooler 成分で支配され、$P \simeq P_2 = K_2\rho_2^{1+1/N_2}$ となる。また、cooler 成分の外側では hotter 成分しかないので表面では、$P = P_1 = K_1\rho_1^{1+1/N_1}$ となる。しかし、cooler 成分の表面近くに密度は cooler 成分に支配されているが、圧力は hotter 成分が寄与する transition 領域ができる。 polytropic index は

$$\begin{aligned}\frac{N}{N+1} &= \frac{d\log\rho}{d\log P} \\ &= \frac{[1+\alpha(d\theta_2/d\theta_1)][(N_1/N_1+1)\theta_1^{1+1/N_1}+\alpha\beta(N_2/N_2+1)\theta_2^{1+1/N_2}]}{(\theta_1+\alpha\theta_2)(\theta_1^{1/N_1}+\alpha\beta\theta_2^{1/N_2})}\end{aligned} \tag{82}$$

は、中心部では N_2 と表面では N_1 と一致するが、transition 領域では大きく変動することになり、$1/N+1 < 1/6$ となる。後者は、中心の境界条件を満たす $U-V$ curve が臨界線を上から下へ横切り、ループ構造を実現するための必要条件である。

図 10 に実際の恒星の $U-V$ curve の例を示した。主系列星では、Lane-Emden 解と同じように、U/V が中心から表面に向かって単調に減少する。これに対して、赤色巨星、および漸近巨星段階では、ループを持った構造になっている。

この構造の転換は恒星が主系列星から赤色巨星への進化の段階で生じることになるが、これには後でみるように、殻燃焼が密接に関係する。

4 自己重力系の熱力学

4.1 Virial 定理と「負の比熱」

理想気体の単位質量あたりの内部エネルギー u は断熱指数を γ とすると

$$u = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{1}{\mu m_a}kT = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} \tag{83}$$

で与えられ、ガス球の内部エネルギー E_{T} と重力エネルギー E_{G} の関係は静水平衡を仮定すると

$$\begin{aligned}(\gamma - 1)\ E_{\mathrm{T}} &= \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r = \int_0^R P 4\pi r^2 dr \\ &= \left[\frac{4\pi r^3 P}{3}\right]_0^R - \int (\frac{4\pi r^3}{3})\frac{dP}{dr}dr = -\frac{1}{3}\int_0^M -\frac{GM_r}{r}dM_r \\ &= -\frac{1}{3}E_{\mathrm{G}}\end{aligned} \tag{84}$$

となる。これを Virial 定理という*。したがって、ガス球の全エネルギー E と E_{T}、E_{G} との関係は、

$$E = E_{\mathrm{T}} + E_{\mathrm{G}} = -(3\gamma - 4)E_{\mathrm{T}} = \frac{3\gamma - 4}{3\gamma - 3}E_{\mathrm{G}} \tag{86}$$

となり、ガス球の全エネルギーと内部エネルギーの増減が逆符合になっている。このため、自己重力が支配するガス球の熱的な振る舞いは通常の熱力学系と違うことになる。すなわち、系がエネルギーを失うと、全エネルギー E は減少するが、内部エネルギー E_{T} は増加して、温度が上昇し、逆に、系がエネルギーを得ると、全エネルギーは増加するのに、内部エネルギーは減少して、温度が下がる。つまり、ガス球はあたかも比熱が負であるかのように振舞うことになる。

この自己重力系の特異な振る舞いは、熱の出入りに対して静水力学的な調整が働くためである。ガス球への熱の出入り、内部エネルギーと重力エネルギーの増減を、それぞれ、δE、δE_{T}、δE_{G} とすると、断熱指数が $\gamma = 5/3$ の単原子分子の場合、

$$\delta E = \delta E_{\mathrm{T}} + \delta E_{\mathrm{G}} = -\delta E_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\delta E_{\mathrm{G}}. \tag{87}$$

系の全エネルギーの変化量に対し、内部エネルギーは同じ量だけ逆符号の方向に変化し、重力エネルギーの変化量は同符号で大きさは 2 倍になっている。これは、全エネルギーの変動に伴い、ガス球は膨張あるいは収縮して静水平衡を回復しょうとするが、これに要する仕事の結果である重力エネルギーの変動は、全エネルギーの変化量を上回り、その差を内部エネルギーからまかなうことになるためである。静水力学的な調整過程は分解すると次

---

* ポリトロープの場合、静水平衡の式が積分できて $(N+1)P/\rho + \phi = -GM/R$ の関係があるので、

$$E_{\mathrm{G}} = \int \frac{1}{2}\phi dM_r = -\frac{3}{5-N}\frac{GM^2}{R} \tag{85}$$

となり、重力エネルギーは explicit に質量と半径の関数として書ける。

のように考えられる。すなわち、ガス球を加熱（冷却）すると圧力が上昇（下降）するので、重力との釣り合いを回復するためガスは膨張（収縮）することになる。しかし、圧力が以前の値に復したとき、膨張（収縮）のため重力は小さく（大きく）なっている。それゆえ、さらに膨張（収縮）が進み、その膨張（収縮）に伴う仕事が加えた（奪った）熱量を上回ることになる。熱力学第一法則から明らかなように系の比熱（熱容量）の定義には熱の出入りに伴う仕事を考慮しなければならないが、自己重力系の場合に比熱が負になるのは、重力の非線形性のために静水平衡形状の調整に要する重力エネルギーの変化が熱エネルギーの出入りを上回るためである。

4.2 準静的な進化

自己重力系の準静的な進化は「負の比熱」によって特徴づけられる。準静的ということの意味は、熱の出入りのtimescaleが力学的な釣り合いの調整に要する動的な時間尺度であるfree-fall timescale $\tau_{\rm ff}$ $(= 1/\sqrt{4\pi G\rho})$ よりも長く、静水平衡が保たれるということである。ガス球は収縮すると表面温度が周囲の宇宙空間よりも高くなり表面からの放射によってエネルギーを失う。その結果、ガス球はさらに収縮し続けることになり、中心密度とともに温度は、式(87)で与えたように、$T_c \propto \rho_c^{1/3} \propto R^{-1}$ に従って上昇していく。

中心温度が $T_c \simeq 10^6$ を超えると恒星の中心部では核融合反応が始まる。このとき、恒星の構造は、表面からのエネルギー放出率 L と中心部での核反応によるエネルギー発生率 L_N による全エネルギーの収支が釣り合う方向に向かう。もし、δt 時間あたりのエネルギー収支 δE が $\delta E/\delta t = -L + L_N < 0$ であれば、核反応が始まる前と同様に中心温度が上昇。この温度の上昇に伴い、核反応が速くなり、エネルギー発生率が大きくなり、$\delta E/\delta t$ は増加して零に近づく。一方、$\delta E/\delta t = -L + L_N > 0$ であれば、中心温度が下降し、その結果、核反応が遅くなり、エネルギー発生率が小さくなり、$\delta E/\delta t$ は減少して、ゼロに向かう。この負のフィード・バックが働くため、自己重力に支配されたガス球では、核反応が起きると、$L_N = L$ の定常的な状態が実現し、安定に保たれることになる*。

核反応過程では原子核間に電気的な反発力（クーロン障壁）が働くので、このクーロン障壁に打ち勝つために、原子番号の大きい核同士（正確には電荷すなわち原子番号の積の大きい）の反応には、高温を要することになる。したがって、恒星内部の定常的な核燃焼はクーロン障壁の小さいものから実現することになる。したがって、最初に起きるのは、最もクーロン障壁の小さい水素が融合してヘリウムを合成する反応であり、それ以外のクーロン障壁の大きな元素同士の核反応は同時には起きない。この定常的な水素燃焼段階では、水素核反応によるエネルギー供給が続く限り、ほぼ一定の構造が維持される**。最初の核燃料が燃え尽きると、ガス球は、再び、重力収縮段階に入ることになり、この重力収縮の結果、中心温度が上昇し、次にクーロン障壁の小さい原子同士の核反応の段階が始まるまで続くことになる。このように、ガス球は、重力収縮と定常的な核燃焼の段階を繰り返しながら、進化することになる。準静的な進化の過程で実現する核反応の種類は以下のノートにまとめた。

---

note.3 主要なエネルギー源となる核反応

A.3.1 水素燃焼: $4^1\mathrm{H} \to {}^4\mathrm{He}$

---

* 実際には、表面からのエネルギー放出率も温度に依存し、それとの競合で決まる。フィード・バックが働らき定常状態が実現するのは、エネルギー発生率の温度依存性の方が強い場合のみである。

** 実際には、核反応に伴い中心部の平均分子量が増加するのに伴い、中心温度は上昇の傾向を示すが、一般に核反応の温度依存性が強いため、変化量は小さい。

恒星の中で最初に起きる核反応は、最もcoulomb障壁の小さい水素同士であるが、^{1}H同志の反応はβ-decayを伴うので、^{2}D$(p,\gamma)^3$Heが先行する。この反応は、中心温度が$T_c \simeq 10^6$ Kで始まるが、もともとの存在量が少ない($X_2 \simeq 10^{-4}$)ため、エネルギーへの寄与は$E_D = 2.7 \times 10^{14}(X_2/10^{-4})$ erg g^{-1}であり、恒星の重力エネルギー($GM/R \simeq (k/\mu m_a)T \sim 1.4 \times 10^{14}(T/10^6$ K) erg g^{-1})と同程度であり、太陽やそれより重い星では、重力収縮の進行を若干遅らせるだけで、殆ど観測的にも影響はない。太陽に比して低質量の星では、特に、褐色矮星（太陽の0.08倍以下; 5章参照）では、光度が小さいため、燃焼の時間尺度は長くなり、宇宙年齢に比して無視できなくなる（この場合、重力収縮の時間尺度も長くなる)。

最初に主要な核エネルギー源となるのは、^{1}Hから^{4}Heの合成である。この過程で解放される核エネルギーは、生成されるヘリウム原子一個当たり$Q = 26.73$ MeVで、静止質量の0.71%にあたり、消費される水素原子の単位質量あたりでは$E_H = 6.4 \times 10^{18}$ erg g^{-1}となる。反応過程にはp-p chain reactionsとCNO cycle reactionsがある。

A.3.1.1　p-p 連鎖反応

最もクーロン障壁が小さい陽子同志の衝突反応で始まる。陽子同士は束縛状態を持たないため、また、離れ離れになるが、衝突の途中で一方の陽子が中性子に換われば重水素が形成される。陽子の中性子への反応$p \to n + e^+ + \nu_e$は吸熱反応なので、孤立した状態では起こり得ず、陽子同士が近づいたときのみ起きることができる。このとき、発生した陽電子(e^+)は周囲の電子と対消滅してガンマ線になり熱エネルギーに転換され、（電子）ニュートリノ(ν_e)はそのまま恒星の外に飛び出してエネルギーを持ち去る。この反応は、

$$2\,^1\mathrm{H} \to {}^2\mathrm{H}(\text{ or }{}^2\mathrm{D}) + \nu_e + 2\gamma \qquad \text{あるいは} \qquad {}^1\mathrm{H}(p, e^+\nu_e)^2\mathrm{D} \tag{A-3.1}$$

と記す。重水素の原子核と陽子の反応は、核子の組み替えるのみであり、余剰エネルギーをphotonとして放出する電磁相互作用による反応のため、陽子同志の衝突がweak interactionによる核子の転換を伴うp-p反応と比べて桁違いに早く(太陽の中心温度では、d-p反応とp-p反応の時間尺度の比は$\sim 10^{-17}$)、重水素が形成されるとすぐに陽子を捕獲して^{3}Heになる。ヘリウムにはもはや陽子は結合できず、また、質量数（原子核中の陽子と中性子の総数）5の原子核は束縛状態がないので、^{3}Heの同士で反応し、^{4}Heが形成されることになる（この反応は、核子の組み換えのみの強い相互作用なので、クーロン障壁が高いにもかかわらず、p-p反応よりも速い（後者に対する時間尺度の比は、太陽の中心温度では、$\sim 10^{-5}$)。したがって、最も低い温度で起きるのは、分枝Iの

$${}^1\mathrm{H}(p, e^+\nu_e)^2\mathrm{D}(p,\gamma)^3\mathrm{He}(^3\mathrm{He}, 2p)^4\mathrm{He} \tag{A-3.2}$$

であるが、高い温度では存在量の多い^{4}Heとの反応の方が速くなり、

$${}^3\mathrm{He}(\alpha,\gamma)^7\mathrm{Be}(e^+\nu_e)^7\mathrm{Li}(p,\alpha)^4\mathrm{He}, \tag{A-3.3}$$

$${}^7\mathrm{Be}(p,\gamma)^8\mathrm{B}(e^+\nu_e)^8\mathrm{Be}(2\alpha) \tag{A-3.4}$$

のLi、Be、Bが関与する分岐II、IIIが支配的になる。これらの反応で最も遅いのは、weak interactionを伴う最初の^{2}Dを形成する反応なので、水素が燃え尽きたとき、^{4}He以外の中間の核生成物は殆ど残らない。

A.3.1.2　CNO 循環反応

p-p連鎖反応には、^{2}Dを形成する最初の衝突反応にweak interactionが関与するために遅く、また、クーロン障壁が小さいために温度依存性も小さく（典型的にはエネルギー発生率の温度依存性は$\varepsilon \propto T^4$)、温度が上がってもエネルギー発生率の増加は比較的緩やかである。これに対し、CNOの陽子捕獲は、温度が上がるとともに急激に早くなり($\varepsilon \propto T^{\sim 12}$)、クーロン障壁の高いにもかかわらず、$T \gtrsim 2 \times 10^7$ Kではかえってp-p反応より早くなる。CNOサイクルでは、陽子を中性子に転換するweak interactionは不安定原子核のβ-decayの形をとるため十分早い(^{13}N, ^{14}O, ^{15}O, および^{17}Fのlifetimeはそれぞれ、862, 102, 176, 93秒)。この場合、ヘリウムの形成は、CN cycleとON cycleの２重循環からなる。

$$\begin{array}{l} {}^{12}\mathrm{C}(p,\gamma)^{13}\mathrm{N}(e^+\nu_e)^{13}\mathrm{C}(p,\gamma)^{14}\mathrm{N}(p,\gamma)^{15}\mathrm{O}(p,\gamma)^{15}\mathrm{N}(p,\alpha)^{12}\mathrm{C} \\ \qquad [^{13}\mathrm{N}(p,\gamma)^{14}\mathrm{O}(e^+\nu_e)^{14}\mathrm{N}] \qquad\qquad [^{15}\mathrm{N}(p,\gamma)^{16}\mathrm{O}] \\ {}^{16}\mathrm{O}(p,\gamma)^{17}\mathrm{F}(e^+\nu_e)^{17}\mathrm{O}(p,\alpha)^{14}\mathrm{N} \end{array} \tag{A-3.5}$$

この反応では、CNO元素は触媒として働くため、水素が燃え尽きても残るが、その組成比は、反応前のそれとは異なり、循環反応なので、各元素の組成は、生成率と崩壊率の釣り合いで決まる。CNO反応で最も陽子捕獲の反応率が小さいのは^{16}Oであるが、一旦反応すると^{17}Oの陽子との反応率は速いので、^{14}Nになる。CNサイクルの最後の分岐に位置する^{15}Nの^{16}Oを生成する(p, γ)反応は^{12}Cを生成する(p, α)反応に比してbranching ratio（分岐率）が$\sim 1:1000$と比して圧倒的に小さいので、殆どのCNO元素は、その次に陽子との反応率が小さい^{14}Nに変換されることになる。AGB段階でCNO循環反応の起きる温度は高くなり、$\simeq 10^8$ K近くに達するが、$2 \times 10^7 \simeq 10^8$ Kで典型的な組成比は、$C : N : O \simeq 0.007 \sim 0.05 : 1 : 0.068 \sim 0.01$。近接連星系で、白色矮星や中性子星の表面に、伴星からガスが降り積もり水素燃焼に点火した場合は、さらに高温になることがあるが、その場合は陽子捕獲反応がβ-decaysより早くなり、^{14}Oや^{15}Oが多くなる。

A.3.2　ヘリウム燃焼:　$^4\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}\mathrm{C}$、^{16}O

ヘリウム原子核の2体反応で形成される^{8}Beは不安定核で、10^{-16}秒で2個のヘリウム原子核に崩壊する。しかしながら、熱力学的な平衡下では不安定核もわずかながら存在し、この^{8}Beに第3のヘリウム原子核が衝突・反応して炭素が形成される。このため、温度としては$\simeq 2 \times 10^8$ Kと水素燃焼に比してかなりの高温を要する。反応過程としては、

$$^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \rightleftharpoons {}^8\mathrm{Be} \qquad {}^8\mathrm{Be} + {}^4\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + \gamma. \tag{$A-3.6$}$$

この炭素の合成は3個のヘリウム原子核が関与するので、3α reactionsと呼ばれる。反応率は、ヘリウムの存在量Yの3乗に比例するので、Yの減少とともに急激に遅くなる。一方、形成された^{12}Cの量が増えると、

$$^{12}\mathrm{C}(\alpha, \gamma)^{16}\mathrm{O} \tag{$A-3.7$}$$

が相対的に速くなり、^{16}Oの合成が進む。結果として、ヘリウム燃焼後には炭素と酸素が残ることになるが、割合は、温度等にも依存する。これらの反応のQ-valuesは3α reactionと^{12}Cのα捕獲について、それぞれ、7.275 MeVと7.162 MeVである。これは単位質量あたりにすると、ヘリウムから炭素が合成されるとき、また、酸素が合成されるとき、それぞれ、$E_{He} = 5.8 \times 10^{17}$と$1.01 \times 10^{18}$ erg g^{-1}であり、単位質量あたりの核エネルギーとしては水素核反応の約1割である。

A.3.3　炭素燃焼:　$^{12}\mathrm{C} \rightarrow {}^{20}\mathrm{Ne}$、^{24}Mg

$T \simeq 6 \times 10^8$ Kになると、炭素原子核同士の2体反応が可能となる。核子数が多くなると、核子あたりの結合エネルギーが小さくなるため、これらの重元素では、核生成物に複数の組み合わせが可能となり、反応性生物が分布する。炭素の場合は、

$$^{12}\mathrm{C} + {}^{12}\mathrm{C} \rightarrow {}^{20}\mathrm{Ne} + \alpha, \quad {}^{23}\mathrm{Na} + p, \quad {}^{24}\mathrm{Mg} + \gamma \tag{$A-3.8$}$$

となるが、主要な生成物は^{20}Neおよび^{24}Mgである。反応のエネルギーは$Q(\mathrm{C} \rightarrow \mathrm{Mg}) = 13.993$ MeVであり、$E_C = 5.6 \times 10^{17}$ erg g^{-1}である。

A.3.4　酸素燃焼とネオンの光分解:　^{16}O、$^{20}\mathrm{Ne} \rightarrow {}^{24}\mathrm{Mg}$、^{28}Si

$T \simeq 10^9$ Kになると、酸素原子核の2体反応が可能となり、反応生成物としては、

$$^{16}\mathrm{O} + {}^{16}\mathrm{O} \rightarrow {}^{28}\mathrm{Si} + \alpha, \quad {}^{31}\mathrm{P} + p, \quad {}^{32}\mathrm{S} \tag{$A-3.9$}$$

で、この反応の主要な核生成物は^{28}Siであり、エネルギーは$Q(\mathrm{O} \rightarrow \mathrm{Si}) = 9.593$ MeVであり、$E_C = 2.9 \times 10^{17}$ erg g^{-1}である。

一方、^{20}Neのα粒子の放出の閾値は$Q = 4.73$ MeVであるが、$T \simeq 10^9$ K $= 0.086$ MeVになると、Plank分布のhigh energy tailの属する、この閾値以上のエネルギーのγ線の数密度が多くなり、

$$^{20}\mathrm{Ne} + \gamma \rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + \alpha, \qquad {}^{20}\mathrm{Ne} + \alpha \rightarrow {}^{24}\mathrm{Mg} \tag{$A-3.10$}$$

の過程でネオンの分解が進むことになる。このとき解放されるエネルギーは$E(2\mathrm{Ne} \rightarrow \mathrm{O} + \mathrm{Mg}) = 7.3 \times 10^{17}$ erg g^{-1}となる。

酸素燃焼とネオンの光分解はほぼ同じ温度でおきるが、密度依存性は、それぞれ、2乗と1乗と違っているため、質量の小さな恒星では、酸素燃焼が先行し、質量の大きな恒星ではネオンの光分解が先行することになる。核生成物としては、^{28}Siと^{24}Mgが残る。

A.3.5　シリコン燃焼: :　^{24}Mg、^{28}Si $\rightarrow$ ^{56}Fe

Si や Mg の原子は、クーロン障壁があまりにも高いので、2 体反応が可能な温度に達する前に光分解が進むことになる。$T \simeq 3 \times 10^9$ K になると、

$$^{28}\mathrm{Si}(\gamma,\alpha)^{24}\mathrm{Mg}(\gamma,\alpha)^{20}\mathrm{Ne}(\gamma,\alpha)^{16}\mathrm{O}(\gamma,\alpha)^{12}\mathrm{C} \qquad (A-3.11)$$

の過程で、次々と α 放出が続き、その結果できた O、C は 2 体反応で Si、Mg、Ne を形成するという形で分解が進行していく。放出された α 粒子は

$$^{28}\mathrm{Si}(\alpha,\gamma)^{32}\mathrm{S}(\alpha,\gamma)^{36}\mathrm{Ar}(\alpha,\gamma)^{40}\mathrm{Ca}(\alpha,\gamma)^{44}\mathrm{Ti}\ldots{}^{56}\mathrm{Fe} \qquad (A-3.12)$$

と次々と吸収されていくが、途中で 2 回 β-decays を経て、^{56}Fe の合成に至る。

5　殻燃焼の物理 I — 等温中心核の熱的な安定性

これまでは中心での核反応の進行について議論してきたが、ガス球は温度勾配があるため、核反応は温度の高い中心部で速く進行する。その結果、内部の組成分布は一様ではなくなるため、力学的な構造も、単純なポリトロープのLane-Emden解で表されるようなものとは異なり、また、熱的な特性、調整機構も違ってくる。

水素燃焼が進むと中心部では水素の含有量が減少してヘリウムが増加し、その周りを水素の多い外層が囲むという組成分布になる。水素がヘリウムに変換すると粒子数が減少し、それに伴って圧力が低下する。また、水素組成の減少は水素核反応によるエネルギー発生率を低下させる。中心部の圧力不足のため、ガス球は収縮して静水平衡を回復しようとするが、一方、収縮は温度の上昇を伴い、核反応によるエネルギー発生率を増加させる。「負の比熱」のもとでは、中心での核反応率と温度勾配で決まる熱流束によるエネルギー収支を調整して釣り合いを回復する方向に構造を変化させることになるが、一般に核反応率の温度依存性は強いため、中心でのエネルギー供給が続く限り、温度の上昇幅は小さく止まざるを得ない。それゆえ、収縮することによっては、水素からヘリウムの変る場合2倍以上に達する平均分子量の増加に伴う圧力の減少を埋め合わせることはできない。むしろ、逆に、温度の上昇によって増加したエネルギーで外層を膨張させて、その重力を減らすことによって静水平衡を保つことになる。これは、式(33)で見るように、Φの増加、あるいは、中心密度の減少を意味する。結果として、恒星は増光しながら膨張していくことになる。

中心部で水素が燃え尽きて表面からの放出に必要なエネルギー供給が途絶えると、ガス球は再び重力収縮を経験することになる。このときの恒星はヘリウムからなる中心核とそれを囲む水素を含む外層という構造になる。中心部の収縮に伴い水素の外層の温度も上昇し、その底で水素の核反応が盛んになる。この中心核の周りで進行する核反応を殻燃焼 (shell burning) という。重力収縮は、外層の底での水素核反応によるエネルギー発生率が表面からのエネルギー放出率と釣り合う状態に至るまで続き、ガス球は再び定常的核燃焼段階に落ち着くことになる。

準静的な殻燃焼段階では、中心核は周囲にエネルギー源を持つことになるが、中心核と外層からなるような構造は、3章で議論したように、組成が一様のLane-Emden解であらわされるような単純なポリトロープとは異なるmorphologyを持ち、複合的なポリトロープで表されることになる。このような段階の構造の議論には、3章で導入した相似変換に対して不変な量U、Vを用いた方が明確になる。本章と7章では、homology invariants UとVを用いて殻燃焼の性質 —等温核の構造とSchönberg-Chandrasekhar限界の存在、および殻燃焼の熱的な安定性 — について議論する。

5.1　Schönberg-Chandrasekhar 限界

中心核内部にエネルギー源がない場合、周囲の水素燃焼殻が熱浴としての役割を果たすので、通常の熱力学系と同様に等温構造が可能な解のひとつとなる。等温球はpolytropic index $N = \infty$のポリトロープに対応するが、表面条件$U = 0$を満たすことができない。一方、外層は温度勾配を持つので、Nが有限のポリトロープで近似できる。$N < 5$の場合、表面での境界条件$U = 0$、$V \to \infty$を満たす解で、$r \to 0$で有限なmass M_rが残るcentrally-condensed typeのものが存在し、中心核を取り囲む外層の構造はこの解で表現される。中心で水素が燃え尽きヘリウム中心核を持つ段階の恒星の内部構造は、等温球と

centrally-condensed typeの２種類の解を継ぎ合わせで構成される。

図11の$U-V$平面上に、$N=\infty$の等温中心核と$N=1.5$の外層の２つのpolytropeの複合で表される解を示した。等温のpolytropeの$U-V$ curve上の任意の点で接合が可能であるが、fitting pointが中心から離れるに従って中心と中心核の外縁との密度比

$$\delta=\rho_c/\rho_1 \tag{88}$$

は大きくなる（下付の数字１は中心核の外縁を指す)。それとともに、最初はV/Uの値は増加するが、$\delta=132.9$で最大値$V/U=2.9$に達した後、減少に転じ、その後も増減を交互に繰り返し特異解の周りを周回しながら近づいていくことになる。

全質量に占める等温中心核のmass fraction $q=M_1/M$は、fitting pointが外へ移動するに伴い最初は増大するが、その変化は単調ではない。図12に等温中心核のmass fractionを中心と外縁との密度比δの関数として示した。中心核の占める割合は、

$$q\equiv q_{\rm SC}=0.393\sim 0.339 \qquad \text{at} \quad \delta\equiv\delta_{\rm SC}=36.7\sim 31.6 \tag{89}$$

(for $N=1.5\sim 3$)で最大値に達する。この点を過ぎると減少し、$\delta=4.4\times10^3\sim 3.84\times10^3$で極小値$q=0.238\sim 0.208$を経て再び増加に転じる。このことは、mass fractionがこの最大値を越える等温中心核の場合、外層との境界での連続の条件を満たす静水平衡な解が存在しないということで、圧力を連続にすると境界で温度が不連続になるということを意味する。

したがって、熱的に安定に存在できる等温中心核には、mass fractionに上限があることになる。すなわち、$q<q_{\rm SC}$である場合は、等温中心核を持つ構造が可能であるが、臨界値$q=q_{\rm SC}$を超えると外層と同じ温度の等温構造では中心核を支えることができず、温度勾配を伴う構造へと移行しなければならず、熱的に不安定がおきることになる。これはガス球の重力熱的な性質と関連している(章末のnote参照)。中心核のmass fractionが小さい場合は、熱を中心部に与える（中心部から奪う）と中心温度が上昇（下降）し、熱が外へ流出（外から流入）して、温度が下がり（上がり)、その結果もとの等温構造に復帰することになる。すなわち、中心核は、通常の熱力学系と同様「正の比熱」をもつ。一方、中心核のmass fractionが臨界値を超えると、熱の移動に伴う静水力学的の調整の効果が大きくなり、熱を与える（奪う）と中心部は膨張（収縮）を経て、中心温度が逆に下降（上昇）し、熱が外から流入（外へ流出）を続けることになり、さらに温度が下がる（上がる）ようになり、「負の比熱」の系になり、その結果、熱的な暴走が起きることになる。

平均分子量の違いを考慮すると、qの最大は密度比の小さい$\delta=16.6$で起き不安定になり、中心核もmass fractionの臨界値はも$q_{\rm SC}=0.078$と小さくなる。ここで外層とヘリウム中心角の分子量を$\mu_e=0.617$、$\mu_c=1.327$とした。この外層の底との密度比μ_c/μ_eを考慮すると$\delta'=\delta(\mu_c/\mu_e)\simeq\delta_{\rm SC}$、$q'=q(\mu_c/\mu_e)^2\simeq q_{\rm SC}$の関係がある。臨界値は外層のモデルによっても異なり、polytropic indexが$N=1.5$から$N=3$に増加すると減少するが、realisticな吸収係数を用いて外層の積分を解くと、この等温中心核の上限の近似値は

$$q_{\rm SC}\simeq M_1/M\simeq 0.37(\mu_{1,e}/\mu_c)^2. \tag{90}$$

となる。

等温中心核に臨界値が存在する結果、殻燃焼を持つ恒星の進化は核燃料が燃え尽きたときの中心核の大きさに依存することになる。ヘリウムの中心核が形成されたとき、そのmass fractionが$q_{\rm SC}$以下であればいったん等温中心核の周りで水素の殻燃焼がおきる静水平衡構造に落ち着く。これは、太陽のような質量の小さい恒星の場合にあたり、中心温度が低いため水素燃焼ではp-p連鎖反応が支配的で対流が発生いないので、中心部で水素が燃え尽きたあと、準静的な殻燃焼で徐々に燃え広がっていく。その結果中心核の質量が増加し、mass fractionが限界値$q_{\rm SC}$を超えると、中心核は熱的に不安定になり、重力収縮を起こすことになる。これに対して、大質量の主系列星の場合は、温度依存性の強いCNOサイクルをエネルギー源とするので、中心対流層が発生し、その中で物質が混合されるため、対流層全体で一様に水素が減少

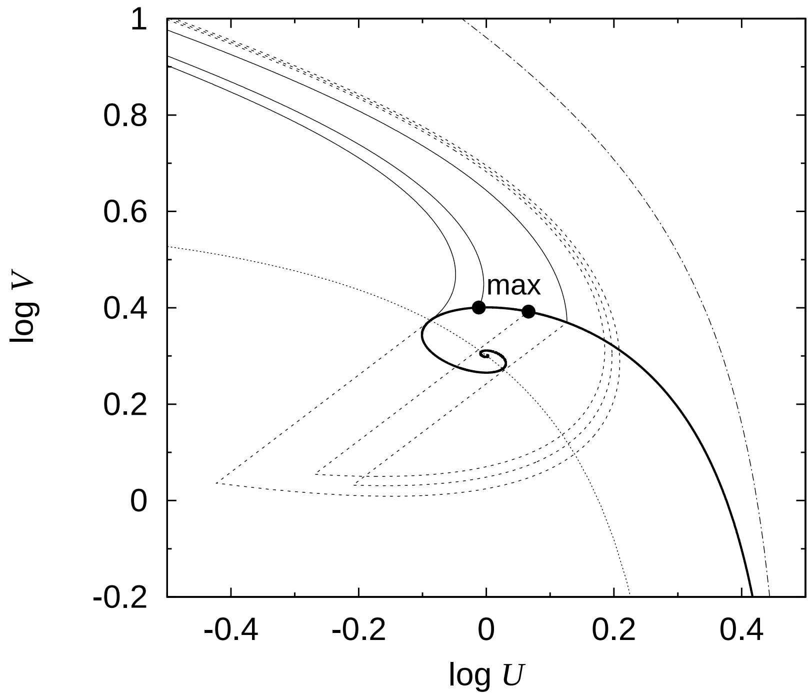

図 11. 等温中心核を持つ恒星の $U-V$ 平面上の構造。実線は中心核と外層の平均分子量が同じ場合、破線は、平均分子量の違いに飛びを考慮した場合である。黒丸はそれぞれの場合に等温中心核の mass fraction q が最大になるモデルの中心核と外層の fitting point を示す。一点鎖線は Lane-Emden 解を表す。

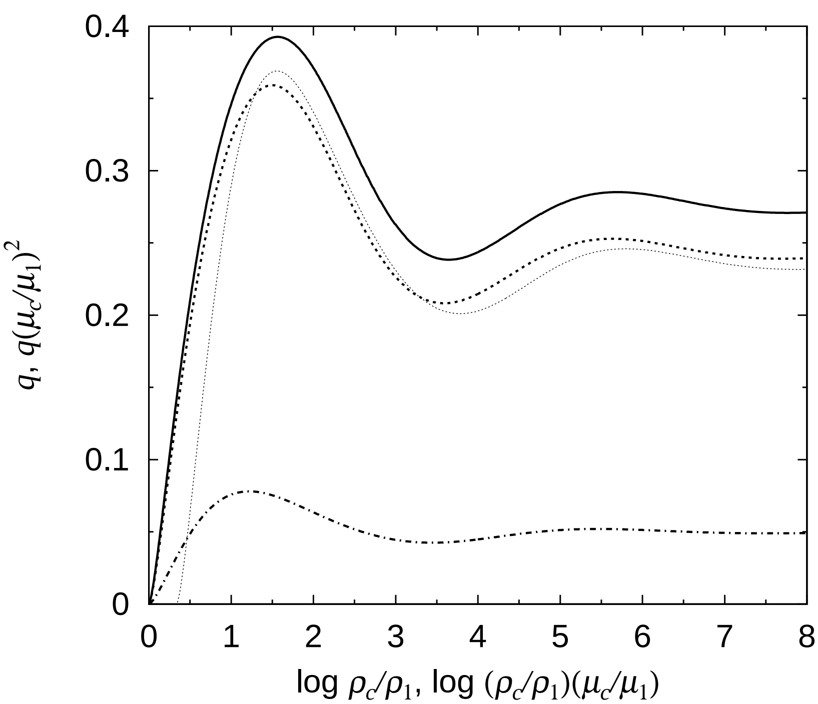

図 12. 中心 (ρ_c) と中心核の外縁 (ρ_1) の密度比伴う等温中心核の mass fraction q の変動。実線と破線は中心核と外層の平均分子量が同じ場合で、外層の polytropic index は $N = 1.5$ (実線) と $N = 3.0$ (破線)。一点鎖線は中心核と外層の平均分子量がある場合で、外層の polytropic index は $N = 1.5$、点線は横軸を外層の底の密度との比 $\log \rho_c/(\rho_1\mu_1/\mu_c)$、縦軸を $q(\mu_c/\mu_1)^2$ にとった。

していくことになる。その結果、中心領域で水素が燃え尽きた段階で、中心核のmass fractionは既に臨界量q_{SC}を上回っていて、中心部で水素が燃え尽きるとともに重力収縮段階に入ることになる。

---

note.4　重力熱力学的catastrophe

ガス球は、質量が小さく熱エネルギーに比べて重力エネルギーが無視できる場合には、通常の熱力学系として振舞うが、質量が増加して重力エネルギーが勝ってくるとやがて比熱が負になり自己重力系として振舞うようになる。Schönberg-Chandrasekhar limitの存在は、この通常の熱力学系から自己重力系への転換と関係している。この通常の熱力学から自己重力系の熱力学への転換はAntonov (1962)によって最初に議論された。彼は球形の固定断熱壁で囲まれた空間でランダムな運動をしている恒星系の状態を調べ、(1)エントロピーの極値は等温構造にあたること、(2)中心密度と外縁での密度比が$\rho_c/\rho_e = 709$を越えると等温構造が熱的に不安定になることを示した。それを受けて、Lynden-Bell & Wood (1968)は、比熱の概念を適用して議論を整理し、境界条件に対する依存性を含めて一般化した。熱的な不安定によって一旦重力収縮が引き起される止まることがないため、これを“gravothermal catastrophe”と名づけた。その後、Bettwieser & Sugimoto (1984)はこのgravothermal catastropheを球状星団などの恒星系のcore collapseと結びつけ、恒星系ではgravothermal oscillationが起きることを示した。彼らはいわゆるガス近似を用いたが、その後、N体計算でも十分大きな系では、同様の現象がおきることが確かめられた（Makino 1996）。

Antonov と Lynden-Bell & Wood は質点系を対象として位相空間の分布関数$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$を直接扱い、系の全エントロピー$S$を

$$S = \int -kf \log f d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{p}/h^3 \qquad (A-4.1)$$

で定義すると、Maxwell-BoltzmannがSの極大値を与えることを示した。ここでは、理想気体を対象として、彼らの議論を辿ることにする。局所熱力学的平衡(LTE)を仮定し、各部分でガスのspecific entropyとspecific internal energyを、それぞれ、小文字のsとuで表すと、系のエントロピーと全エネルギーは、

$$S = \int s\rho d\boldsymbol{x} \qquad (A-4.2)$$

$$E = \int (u + \frac{1}{2}\phi)\rho d\boldsymbol{x} \qquad (A-4.3)$$

で与えられる。全質量Mの系が体積Vの断熱壁で囲まれているとき、熱平衡状態は変分原理からに任意のvirtual Lagrangian変位$\boldsymbol{\xi}$に対して

$$\delta W = \delta S - \frac{1}{T_e}\delta E - \frac{P_e}{T_e}\delta V = 0 \qquad (A-4.4)$$

$$\delta^2 W = \delta^2 S - \delta^2\big(\frac{1}{T_e}E - \frac{P_e}{T_e}V\big) < 0 \qquad (A-4.5)$$

条件からで求められる。ここで、T_eとP_eはLagrangeの未定係数である。重力エネルギーの変分が

$$\delta \int \frac{1}{2}\phi\rho d\boldsymbol{x} = \int (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{\xi}\rho d\boldsymbol{x} \qquad (A-4.6)$$

(Chandrasekhar 1969)に留意すると、式(A-4.4)の変分は

$$\delta W = \int \left[\left(1 - \frac{T}{T_e}\right)\Delta s + \frac{1}{T_e}\left(-\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\phi\right)\cdot\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{T_e}\frac{1}{\rho}\nabla\{(P-P_e)\boldsymbol{\xi}\}\right]\rho d\boldsymbol{x} = 0 \qquad (A-4.7)$$

となる。ここで、ΔはLagrange変分を表す、すなわち、$\Delta s = s(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}) - s(\boldsymbol{x})$。したがって、熱平衡状態は、等温の静水平衡のもとで実現することになる。積分の第3項は境界条件$P = P_e$を表す。

上記の (A-4.7) の条件が実際 S の最大値をあたえることを診るには、2 階の変分をとらなければならない。このことは等温静水平衡構造の熱的な安定性を求めることに対応し、したがって、摂動方程式を解くことになるが、これと等価な方法として linear series の転回点から求めることができる。静水平衡を前提とすると、全エネルギーは

$$E = \frac{GM^2}{R}\left(\frac{3\xi_1^3}{2\varphi_1^2}\int \varpi\xi^2 d\xi - \frac{\xi^3}{\varphi_1}\int \varphi\theta\xi d\xi\right) \tag{$A-4.8$}$$

で与えられる。中心と断熱壁境界との密度比 $\delta = \rho_c/\rho_1$ をパラメータとして静水平衡を満たす構造を求めると、δ が増加するとともに全エネルギーは最初は増加するが、$\delta = 709$ で最大に達し、その後は振動するが、極大値は逓減する。この臨界値は、境界条件によってかわり、Schönberg-Chandrasekhar 限界は近似的に一定温度の熱浴に囲まれた場合に対応する。

6　準静的進化の限界＝恒星の終末

ガス球の準静的な進化が続く条件は、ガス球の静水平衡が保たれることと、また、「負の比熱」が保持されることである。この２つの条件がやぶれると、恒星はその寿命を終えことになる。大質量星は、動的な不安定を起こし、中低質量の恒星は、進化の後期に電子縮退によって比熱が正となり終末を迎える。

6.1　動力学的な不安定性 - 中性子星、ブラック・ホール

静水平衡のポリトロープ球の質量は $M \propto \rho_c^{(3-N)/2N}$ となる。すなわち、ポリトロープのガス球では、一様な (homologous) 膨張/圧縮に対して、$N = 3$、あるいは、$\Gamma \equiv 1 + 1/N = 4/3$ を境に質量と中心密度の依存関係の符号が変わることになるが、これは安定性が交替することを意味している。

1. $N < 3$ （$\Gamma > 4/3$）の場合: 静水平衡で支えられる質量 M は中心密度の増加関数なので、膨張/圧縮に対して、元に復元するする力が働く。
2. $N = 3$ （$\Gamma = 4/3$）の場合: 前節の白色矮星のところでも見たように、M は中心密度によらないため、圧縮/膨張に対して中立で、そのまま停まる。
3. $N > 3$ （$\Gamma < 4/3$）の場合: M は ρ_c の減少関数なので、不安定である。圧縮するとそのままつぶれてしまい、膨張させると逆にそのまま飛び散ってしまうことになる。

理想気体では、断熱指数 $\gamma = (\partial \log P/\partial \log_\rho)_{\rm ad} = 5/3 > 4/3$ (一原子分子の場合) であり、動力学的には安定であるが、電離など相転移が起きる場合には、断熱指数は小さくなり $\gamma < 4/3$ になりうる。温度が1万度を超えると物質は電離するが、

$$\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}^+ + e: \quad \mathrm{He} \rightarrow \mathrm{He}^+ + e: \quad \mathrm{He}^+ \rightarrow \mathrm{He}^{++} + e$$

の反応がおきると、圧縮（膨張）させて密度を上（下）げても、仕事が電離のエネルギー（再結合のエネルギーが仕事）に使われて温度が上（下）らないため圧力の増加（減少）は小さくなる。したがって、水素やヘリウムの組成の多い元素の場合は、内部で相転移が起きるとガス全体の断熱指数が $\gamma < 4/3$ になり、ガス球は動力学的に不安定になる。電離の場合には、すべての原子が電離、あるいは、再結合した段階で、断熱指数が通常の値に復し、ガス球は動力学的に安定化、その結果、膨張/収縮は反跳し、収縮/膨張に転じる。これが、セファイドなどの脈動のひとつ機構である。

また、$(4 \sim 5) \times 10^9$ K を超える高温では、鉄の分解や電子対発生が起きるため、断熱指数が $\gamma < 4/3$ となって、ガス球が動力学的に不安定になる。鉄の分解は、恒星の進化の最後に起きる。中心部に鉄が形成されると、鉄は最も結合エネルギーが大きいため、核エネルギーを使い果たしたことになり、それ以降、鉄からなるガス球の中心部はもっぱら重力崩収縮を続けることになる。その結果、高温になり、ついには、熱運動のエネルギーが核子の結合エネルギーを上回るようになり、鉄の分解

$$^{56}\mathrm{Fe} \longrightarrow 13^4\mathrm{He} + 4n + 124.4\mathrm{Mev} \tag{91}$$

が始まり、動力学的な不安定性が誘起される。中心部の崩壊は、原子核が分解して、核子間に反発力が働くようになると一旦崩壊は止まる（減速される)。後から崩落してきた外層はこの中心核に止められて反跳する、あるいは、このような高温･高密度の中心部分では、ニュートリノが大量に発生す

るので、その内部から放出されるニュートリノを吸収して、エネルギーを得る。その結果、外層は崩壊から膨張に転じて超新星爆発を起こすと考えられている。中心部に残された質量が比較的小さい ($\lesssim 2M_\odot$) 場合は、中性子星が形成される。初期の質量が大きく中心核の質量が大きい場合は、核力では重力を支えられずに、あるいは、反跳を起こすことなく、そのままつぶれて、ブラック・ホールが残されることになると考えられている。これが、鉄崩壊型超新星爆発の機構であり、II型超新星爆発のモデルである。

一方、$T \gtrsim 10^9$ では、熱輻射のうちでエネルギーが電子の静止エネルギーを上回る熱ガンマ線の割合が多くなり、頻繁に電子陽電子の対発生が起きるようになる。

$$2\gamma \longleftrightarrow e^- + e^+ \tag{92}$$

電子対の熱容量への寄与は、輻射と同程度であるが、ガスの寄与が非常に小さくなる大質量星では、対発生のために、断熱指数が $\gamma < 4/3$ となり、動的に不安定になる。太陽の質量の100倍を超える恒星では、温度が 10^9 K を超えた段階で重力崩壊を起こす。この温度では、中心部はすでに炭素燃焼を終え、酸素で構成されているので、この崩壊によって、中心部の温度、密度が上昇すると、酸素燃焼に点火、核エネルギーの発生が大きくなるが、その後の進化は質量によって異なる。質量が比較的小さい場合、温度の割りに密度が高く、重力崩壊による圧縮が比較的小さい段階で酸素燃焼に点火し、反跳、酸素燃焼ので発生する核エネルギーが重力エネルギーを上回り、恒星全体が飛び散ることになる。これが、電子対超新星爆発である。さらに質量の大きい恒星では、圧縮が大きく核反応による反跳が起きる前に鉄の分解領域に突入することになる。この場合は、反跳は起こらず、そのまま星全体がブラック・ホールになることになる。

6.2 動力学的な安定性の解析

前節のポリトロープの安定性の議論では、ガス球全体で同じ Γ を仮定した。しかし、相転移で $\gamma < 4/3$ になるのはガス球内の一部であり、その場合には安定性の解析を必要とする。ここで議論するのは、動径方向の断熱的な摂動に対する系の応答である。平衡形状 (subscript 0 で記述) からの Lagrange 的な摂動 (Δ で記述) を考え

$$r = r_0 + \Delta r = r_0(1+\xi), \qquad P = P_0 + \Delta P, \qquad \rho = \rho_0 + \Delta\rho \tag{93}$$

として、(9′) (10′) に時間微分の項を加えた動力学的な方程式

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{M_r} + 4\pi r^2 \rho^2 \frac{\partial}{\partial M_r} r^2 \left.\frac{\partial r}{\partial t}\right|_{M_r} = 0 \tag{9''}$$

$$\left.\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right|_{M_r} = -4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial M_r} - \frac{G M_r}{r^2} \tag{10''}$$

の摂動を1次までとる。ただし、断熱過程を考えるので、

$$\Delta P / P_0 = \gamma \Delta\rho / \rho_0. \tag{94}$$

連続の方程式 (9”) の摂動は時間積分できて、

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -3\xi - r_0 \frac{\partial \xi}{\partial r_0}. \tag{95}$$

これを代入して、密度の摂動を消去すると、運動量保存則 (10”) の摂動から

$$\left.\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right|_{M_r} = \left(\frac{4\pi}{r_0}\right)^2 \frac{\partial}{\partial M_r}\left(\gamma \rho_0 P_0 r_0^6 \frac{\partial \xi}{\partial M_r}\right) + 4\pi r_0 \left[\frac{\partial}{\partial M_r}(3\gamma - 4) P_0\right] \xi \tag{96}$$

となる。Fourier 変換して

$$\xi = \zeta \exp(i\omega t) \tag{97}$$

とおくと固有値問題となり、

$$L[\zeta] \equiv -\frac{1}{r_0^4\rho_0}\frac{d}{dr_0}\left[\gamma P_0 r_0^4 \frac{d\zeta}{dr_0}\right] - \frac{1}{r_0\rho_0}\left[\frac{d}{dr_0}(3\gamma-4)P_0\right]\zeta = \omega^2\zeta. \tag{98}$$

これはStrum-Liouville 型の方程式で、固有値に最小値 ω_0^2 が存在し、任意の関数 u に対して

$$\omega_0^2 \le -\frac{\int_0^M u^* L[u] r_0^2 dM_r}{\int_0^M u^* u r_0^2 dM_r} = \frac{\int_0^M 3(3\gamma-4)(P_0/\rho_0)dM_r}{\int_0^M r_0^2 dM_r}. \tag{99}$$

最右辺では $u = \mathrm{const}$ と置いた*。積分が負になることが不安定性の十分条件で、固有値問題を解き、固有関数を求めると、ω_0^2 はこれより小さくなる。脚注に見るように、ガス球内部で $\gamma < 4/3$ の領域があることが、不安定性の必要条件に寄与することを示している。

6.2.1 Pulsaton Instability

$\omega_0^2 > 0$ の場合は、断熱的な摂動に対しては安定であり、平衡形状の周りに振動することになる。この振幅の盛衰は energetics から議論できる。振動の energy E の変化は

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\int(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\phi + u)dM_r \\ &= \int_0^M T\frac{ds}{dt}dM_r - \left[4\pi r^2 Pv\right]_0^M = \int_0^M \varepsilon_N - \frac{\partial L_r}{\partial M_r}dM_r\end{aligned} \tag{100}$$

で評価できる**。振動に伴う温度とエントロピーの変化を

$$T = T_0 + \Delta T \qquad s = s_0 + \Delta s \tag{101}$$

とおくと、1周期の振動の間の energy gain W は

$$\begin{aligned}W &= \oint \frac{dE}{dt}dt = \oint dt \int_0^M (T\frac{ds}{dt})dM_r \\ &= \oint dt \int \Delta T \frac{d\Delta s}{dt}dM_r = \oint dt \int \frac{\Delta T}{T}\Delta(\varepsilon_N - \frac{\partial}{\partial M_r}L_r)dM_r\end{aligned} \tag{102}$$

となる***。$W > 0$ の場合は、振幅が成長することになり、これを振動不安定という。この不安定には、最後の括弧の中の第1項の核反応が寄与する場合と、第2項の輻射の流れを決める吸収係数が寄与する場合があり、それぞれ ε 機構 (mechanism) および κ 機構 (mechanism) と呼ばれる。後者は、一般に、収縮したときの高温時に輻射を堰きとめて暖め、膨張し低温になったときに輻射をより多く逃がしてさらに冷却することによって、振動の振幅を成長させる機構が働く場合で、通常、外層の水素およびヘリウムの電離層で励起される。これに対して、前者の場合は、核反応は高温でエネルギー発生率が大きくなるので常に振幅を成長させる方向に働くが、核反応は中心部に限定されるので、中心部が振動する場合に不安定化に効くことになる。通常の恒星では、振動の振幅は圧力の小さい外層で大きく、密度の大きい中心部は殆ど振動

---

*

$$\begin{aligned}\int_0^M u^* L[u] r_0^2 dM_r = \int_0^R 4\pi P_0[\gamma r_0 |\frac{du}{dt}|^2 + (3\gamma-4)(|u|^2 + \frac{d|u|^2}{d\ln r_0})]dr_0 \\ -4\pi[\gamma r_0^4 P_0 u^* \frac{du}{dr_0} + r_0 P_0(3\gamma-4)uu^*]_0^R.\end{aligned}$$

最後の鍵括弧の中は、表面で $P_0 = 0$ を考慮すると消える。

** $\int \frac{1}{2}\phi dM_r = \int \frac{1}{2G}\phi r^2 \nabla^2 \phi dr = \int -\frac{GM_r}{r}dM_r$ を使う。

*** 平衡形状ではlocalに $\varepsilon_N - \frac{\partial}{\partial M_r}L_r = 0$ を使う。

しないので、この機構は働かない。しかし、太陽質量の~ 100近くあるいはそれ以上の恒星のように、輻射圧の寄与が大きく、断熱指数が$4/3$に近くなると、恒星全体が一様に振動するようになり、ε機構で脈動不安定になる。したがって、これらの大質量星では、主系列星に達し中心部で核反応が起きるようになると、脈動が成長して振幅が大きくなり、表面から質量を放出するようになる。その結果、恒星の質量は減少し、脈動が収まることになる。

6.2.2 超大質量星の相対論的な不安定性

質量が増加すると2章の式(35)で見たように、輻射の寄与が大きくなるので、恒星の構造は$N = 3$のポリトロープでの近似がよくなる。したがって、超大質量星では、$\beta = 4.27\mu^{-1}(M/M_\odot)^{-1/2}$と小さくなり、断熱指数も$\gamma = (4/3)[1-(3/4)\beta - (1/8)\beta^2]/[1-(7/8)\beta)]$となり、動的な安定性の境界である$4/3$に極めて近くなる。

一方、半径についても、式(30)より、$R = (\Xi/\Phi)GM\rho_c/P_c$で与えられるので、重力半径$R_g = 2GM/c^2$との比も

$$R/R_g = (\Xi/\Phi)\beta c^2 \mu m_a/2k_B T_c = 4.6 \times 10^{12}\mu\beta/T_c \tag{103}$$

となり、一般相対論的な効果も効いてくる。例えば、$M > 10^6 M_\odot$、$T_c \sim 10^8$ K とすると$R/R_g \lesssim 10^2$。一般相対論的な恒星の重力平衡の式は

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P/c^2)\frac{G(M_r + 4\pi r^3 P/c^2)}{r(r - 2GM_r/c^2)} \tag{104}$$

であたえられる。この方程式は、Tolman-Oppenheimer-Volkoff方程式と呼ばれるが、$R_g/R \ll 1$として、1次の摂動まで近似(post-Newtonian approximation)すると

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}\left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{c^2 M_r} + \frac{P}{c^2\rho} + \frac{2GM_r}{rc^2}\right). \tag{105}$$

これは、一般相対性理論の効果を考慮すると、質量と等価なエネルギーにも重力がかかって、重力が強くなることを意味する。したがって、この効果が効いてくると、$4/3$より大きいγに対しても、動的に不安定になりうることを意味する。

一般相対性理論の効果を考慮すると、動的不安定性の条件は

$$\gamma - \frac{4}{3} = \frac{\beta}{6} < 1.1245\frac{R_g}{R} \tag{106}$$

で与えられる（下記のnote参照）。βは質量で決まっているので、この条件は質量と半径の関係に書き直せて

$$R < R_{\rm cr} = 4.8 \times 10^5 \mu\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3/2} \text{ cm} \tag{107}$$

となる。すなわち、質量を与えると安定に静水平衡を保つことのできる半径に下限があることになる。主系列段階のCNOサイクル反応の起きる温度を$T \simeq 7 \times 10^7$ K とすると、主系列段階の半径は、ポリトロープ$N = 3$の解から、$R_{\rm ms} = 8.3 \times 10^{10}(M/M_\odot)^{1/2}$ cm（3章の式[30]参照)となるので、上記の臨界半径$R_{\rm cr}$に対応して、主系列段階の恒星の質量の上限値

$$M_{\rm cr} = 3.6 \times 10^5 M_\odot \tag{108}$$

が定義される。$M > M_{\rm cr}$の恒星は、主系列星になる前に、動的に不安定になり、そのまま重力崩壊して、black holeになる。

一般相対性理論では、いくつかの質量（エネルギー）の表式が定義される。重力質量 M は、

$$M = \int_0^R (\epsilon/c^2) 4\pi r^2 dr$$

で定義され、静止質量、内部エネルギー、および、重力エネルギーを含む。静止質量を含む固有内部エネルギー M_p、および、固有の静止質量 M_m は、それぞれ、

$$M_p = \int_0^R (\epsilon/c^2)(1 - 2GM_r/c^2 r)^{-1/2} 4\pi r^2 dr$$
$$M_m = \int_0^R \rho(1 - 2GM_r/c^2 r)^{-1/2} 4\pi r^2 dr$$

で与えられる。ここで、ρ は物質の静止質量密度であり、M_m は星を構成するバリオン数に静止質量をかけたものである。重力エネルギー E_G と静止質量を含まない内部エネルギー E_T は、それぞれ、

$$E_G = (M - M_p)c^2 = -\int \frac{GM_r\epsilon}{rc^2} dV - \frac{3}{2}\int \frac{G^2 M_r^2 \epsilon}{r^2 c^2} 4\pi dV$$
$$E_T = (M_p - M)c^2 = \int \rho u dV + \int \frac{GM_r}{r} \rho u dV.$$

ここで、u は単位質量あたりの内部エネルギーで、$\rho u = (\epsilon - \rho c^2)$ であり、

$$P = (\gamma - 1)\rho u, \qquad \gamma = \frac{4}{3} + \frac{\beta}{6}.$$

一方、式 (105) を $dV = 4\pi r^2 dr$ をかけて積分すると、

$$3\int P dV - \int \frac{GM_r\epsilon}{rc^2} dV + \int \frac{GM_r P}{c^2 r} dV - 3\int \frac{G^2 M_r^2}{c^2 r^2} \rho dV = 0.$$

この最初の 2 項をとると virial 定理に対応する。これを用いると、全エネルギーは

$$E = E_T + E_G = -\frac{\langle 3\gamma - 4\rangle}{3\langle \gamma - 1\rangle}\int \frac{GM_r\epsilon}{rc^2} dV + \frac{2}{3}\int \frac{GM_r}{r}\rho u dV$$
$$- \frac{\langle 5 - 3\gamma\rangle}{3\langle \gamma - 1\rangle}\frac{3}{2}\int \frac{G^2 M_r^2 \epsilon}{r^2 c^2} 4\pi dV$$

$N = 3$ のポリトロープの解を用いて計算すると

$$\frac{E}{Mc^2} = -\frac{3}{8}\beta\frac{R_g}{R} + 1.265\left(\frac{R_g}{R}\right)^2.$$

これは E は有限の半径 $(R = R_{\rm cr})$ で最小値をとり、その半径よりさらに収縮すると、かえって増加し、静水平衡を支えるのにより大きなエネルギーが必要となること、すなわち、ガス球が動的に不安定になることを意味する。

6.3 核爆弾としての終末 - 不発弾あるいは超新星爆発

6.3.1 電子縮退による正の比熱への転化

理想気体の場合、電子とイオンはエネルギーの等分配が成り立つので、それぞれの分圧は、その数密度に比例、したがって、平均分子量に反比例することになる。しかし、電子は質量が小さいために、その運動量はイオンに比して桁違いに小さく、位相空間で占める体積は小さく密度は大きい。静水平

衡のもとでは、ガス球は密度の増加に比して温度の上昇が小さいため、重力収縮して中心密度が高くなるとともに位相空間での密度が高くなり、やがて、Fermi 粒子である電子にはPauliの排他律が働き、電子縮退を起こす。電子はFermi-Dirac統計に従い、電子の化学ポテンシャルを ΨkT とおくと、

$$n_e = \int_0^\infty \frac{1}{\exp(\epsilon/kT - \Psi) + 1} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp, \tag{109}$$

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^\infty p \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \frac{1}{\exp(\epsilon/kT - \Psi) + 1} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp. \tag{110}$$

ここで、ϵ は特殊相対論を考慮した運動エネルギーである $[= (m_e^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} - m_e c^2]$。非縮退、非相対論的な場合、電子の数密度と化学ポテンシャルの関係は

$$n_e = e^\Psi 2(2\pi m_e kT/h^2)^{3/2} \tag{111}$$

で与えられるので、これを使って電子縮退の条件 $\Psi \gtrsim 0$ を書き下すと

$$\rho \gtrsim \mu_e m_a \cdot 2(2\pi m_e kT/h^2)^{3/2} = 8.1 \mu_e T_6^{3/2} \tag{112}$$

(μ_e は電子の一個あたりの平均分子量で、すなわち平均核子数、$T_6 = T/10^6$ K)。質量の小さいガス球ほど中心密度の割に中心温度が低い (式 [33]) ので、電子縮退は低密度でおきることになる。

縮退が強い場合には、ガスの圧力は温度によらず電子密度だけで決まるようになる。完全縮退の下では、電子の数密度と圧力は Fermi 運動量 p_F を用いて

$$n_e = (8\pi/3)(m_e c/h)^3 (p_F/m_e c)^3 \tag{113}$$

$$P_e = \begin{cases} (\pi/3)(m_e c/h)^3 m_e c^2 8/5 (p_F/m_e c)^5 & \text{(N.R.)} \\ (\pi/3)(m_e c/h)^3 m_e c^2 2 (p_F/m_e c)^4 & \text{(E.R.)} \end{cases} \tag{114}$$

で与えられる。電子の運動エネルギーが非相対論的 (N.R.=non-relativistic) な場合と相対論的（E.R.=extremely-relativistic）な場合の境界は、Fermi エネルギーが $\epsilon_F = (m_e^2 c^4 + p_F^2 c^2)^{1/2} - m_e c^2$ が静止エネルギー mc^2 に匹敵するようになるという条件（ここでは、$p_F = 2 m_e c$ とおく）で決まり、

$$\rho = \mu_e m_a \frac{64\pi}{3} (\frac{m_e c}{h})^3 = 7.8 \times 10^6 \mu_e \text{ g cm}^{-3} \tag{115}$$

であり、これ以上の密度では相対論的な取り扱いが必要となる。したがって、電子の縮退圧は密度の関数としてそれぞれ

$$P_e = \begin{cases} (4/5)(\pi/3)^{2/3} (h/m_e c)^2 m_e c^2 (\rho/\mu_e m_a)^{5/3} & \text{(N.R.)} \\ (\pi/3)^{2/3} (h/m_e c) m_e c^2 (\rho/\mu_e m_a)^{4/3} & \text{(E.R.)} \end{cases} \tag{116}$$

となり、非相対論的な場合は $N = 1.5$、相対論的な場合は $N = 3$ のポリトロープとなる。

電子が強く縮退すると、ガス球の熱的な振る舞いが理想気体の場合と異なる。電子の縮退により圧力がイオンの圧力を上回る ($P_e \gg P_i$) ようになると、圧力は密度で決まり、温度が変化しても変わらない。したがって、加熱、冷却で熱の出入りがあっても重力エネルギーの変動は無視できるようになり、$\delta E \simeq \delta E_T$、$|\delta E_G / \delta E_T| \ll 1$、すなわち、ガス球の比熱は正の通常の熱力学系となる。このため、恒星はまさに核爆弾そのものとなり、爆弾の命運は、起爆装置が作動するかどうかで分岐することになる。

I. 恒星は表面からの放射によってエネルギーを失うが、電子縮退によって比熱が正となったもとでは、この輻射による熱損失とともに中心の温度が下がり、恒星全体が冷却していくことになる。この場合、核反応には点火せ

ず、いわばガス球は不発弾である。この電子の縮退圧で支えられた恒星が白色矮星である。

II. ガスは圧縮されるとその仕事に伴って温度が上昇するので、電子が縮退した領域で核反応に点火することがある。この場合、核反応によってエネルギーが発生して中心温度が上昇しても、膨張を伴わないので、エネルギー発生率が表面からのエネルギー放出率を上回ると、内部エネルギーの増加となって温度が上昇(「正の比熱」)、その結果、核反応率が上昇、エネルギー発生率が増加してさらに温度が上昇しと、温度上昇とエネルギー発生率の増加とが加速されていく。つまり、一旦発火の条件 ($\delta E > 0$) が満たされると、正のフィード・バックが働き、核反応は暴走することになる。

この核反応の暴走は、温度が上昇して、縮退の条件 (112) に達し、電子縮退が解けるまで続くことになる。この現象はflash と呼ばれる。縮退が解けると、比熱が負に戻り、加熱するとともに、ガス球は膨張を始めるが、その後の進化はこの膨張の速さに依存することになる。膨張の速さは温度の上昇の時間尺度 $\tau_{\rm exp} = c_P T/\varepsilon_N$ (c_P はガスの定圧比熱)で見積もられ、これと系の動力学的な時間尺度 $\tau_{\rm ff} = 1/\sqrt{4\pi G\rho}$ との比較で、結末が異なる。

(a) $\tau_{\rm exp} > \tau_{\rm ff}$ の場合: ガス球は静水平衡を保ちながら膨張し、やがて縮退が解けて「負の比熱」の重力熱力学的な状態を回復、その後は、エネルギーの増加とともに温度が下がり、核反応も遅くなって暴走が収まり、$L_N = L$ の安定な核燃焼段階に落ち着くことになる。

(b) $\tau_{\rm exp} < \tau_{\rm ff}$ の場合: 縮退が解けても系の膨張が、エネルギーの増加に追いつかないため、圧力は下がらず、衝撃波が発生、暴走が続くことになる。この結果、発生した核エネルギーがガス球の束縛エネルギー ($-E = -E_T - E_G$) を上回ると、ガス球全体が吹き飛び、超新星爆発に至る。

電子縮退の下では、温度が上がっても、密度、圧力は殆ど変化しないので、縮退が解けるときの温度は縮退の条件から、暴走に点火した時の密度の関数となる。したがって、このときの核反応によるエネルギーの発生率は、点火時の密度、すなわち、縮退の強さで決まり、高密度で点火するほど、大きくなる。近接連星系に属する白色矮星の場合、伴星から質量が流入して表面に降着することが起きる。この場合、降着物質の質量の増加とともに降着層はその重みで圧縮され、温度が上がる。水素の多いガスが降着すると、圧縮の結果、表面近くで水素燃焼に点火する。この場合は、(a) の場合にあたり、核反応の暴走は準静的に進行し、縮退が解けたあとは、表面に降着した水素外層は膨張、燃焼領域の温度が下がり、安定な核燃焼段階におさまることになる。しかしながら、表面近くの密度が小さい層では、動力学的時間尺度が長いので、膨張についていけず衝撃波がたち、ガスが放出される。これが新星爆発の機構と考えられている。一方、降着した水素が安定に燃えると白色矮星の質量が増加することになるが、その結果、白色矮星は収縮して (下記参照)、中心温度が上昇、中心で炭素燃焼に点火することがある。この場合は、密度が高いので、(b) の場合の進化を辿る。これがIa型超新星爆発の機構である。

6.3.2 白色矮星 = 電子の縮退圧で支えられる星

電子が縮退すると、ガス球は冷却して温度が下がり、やがて、電子の縮退圧に比してイオンの圧力が無視できるようになる。電子縮退ガスの状態方程式は、ポリトロープで近似できるので、このときの質量と半径はLane-Emden解から中心密度の関数として求められる。電子のFermi エネルギーが非相対論的な場合は、ポリトロープ指数は $N = 1.5$ であり、半径と質量はそれぞれ、

$$\begin{aligned} R &= 5.777\Big[\frac{h^2}{4\pi G m_e}\frac{1}{5}\Big(\frac{3}{8\pi}\Big)^{2/3}\Big(\frac{1}{\mu_e m_a}\Big)^{5/3}\Big]^{1/2}\ \rho_c^{-1/6} \\ M &= 10.73\Big[\frac{3h^6}{32\pi^2 G^3 m_e^3}\frac{1}{5^3}\Big(\frac{1}{\mu_e m_a}\Big)^5\Big]^{1/2}\ \rho_c^{1/2} \end{aligned} \tag{117}$$

となる。つまり、白色矮星の質量は中心密度の増加関数ではあるが、半径は、

中心密度の減少関数である。密度を消去すると、質量－半径関係が導かれ

$$RM^{1/3} = \frac{1}{5}(\frac{3}{32\pi^2\mu_e m_a})^{2/3}\frac{h^2}{G\mu_e m_a m_e}\Xi\Phi^{1/3} = 0.040(\frac{1}{\mu_e})^{5/3}R_\odot M_\odot^{1/3} \tag{118}$$

ヘリウムや炭素･酸素($\mu_e = 2$)からなる白色矮星では、最右辺の係数は$\simeq 0.013$となり、半径は太陽の$1/100$程度となる。一方、電子のFermiエネルギーが相対論的になると、$P \propto \rho^{4/3}$、すなわち、$N = 3$となるので、質量は

$$M = M_{\rm ch} \equiv 16.14\Big[\frac{3}{32\pi^2}(\frac{hc}{4Gm_a})^3\frac{1}{m_a}\Big]^{1/2}\mu_e^{-2} = 1.42M_\odot(\frac{2}{\mu_e})^2 \tag{119}$$

と中心密度によらず一意的に決まる。$M_{\rm ch}$はChandrasekhar限界質量と呼ばれ、電子の縮退圧で支えることのできる質量の上限値をあたえる。半径は、

$$R = 13.79\Big[\frac{hc}{4\pi Gm_a}(\frac{3}{8\pi m_a})^{1/3}\Big]^{1/2}(\frac{1}{\mu_e})^{2/3}\ \rho_c^{-1/3} = 0.011(\frac{1}{\mu_e})^{2/3}\rho_{c,6}^{-1/3}R_\odot \tag{120}$$

($\rho_{c,6} = \rho_c/10^6{\rm g\ cm^{-3}}$) で、中心密度とともに減少する。したがって、近接連星で伴星からの質量流入で白色矮星の質量が増加すると、中心密度は$\rho_c \propto M^2$で増加し、半径は、$R \propto M^{-1/3}$で収縮していく。質量が$M_{\rm ch}$近づくと、中心密度の増加が急激になり、それに応じて半径も小さくなっていく。質量がChandrasekhar限界を超過すると静水平衡の構造がなくなり動力学的に収縮し、重力崩壊を起こす。実際には、その前に重力収縮で中心密度が高くなり、また、圧縮で温度も上がるので核反応が点火し、超新星爆発を起こす。

6.3.3 恒星の下限質量と褐色矮星

ガス球の進化は$T_c \propto \rho_c^{1/3}M^{2/3}$ (式 [33]) に沿う。一方、縮退の条件は$T_c \propto \rho_c^{2/3}$ (式 [112]) で与えられる。したがって、電子縮退は、低質量の恒星ほど早く（低密度、低温度で）起きることになる。縮退すると中心温度は下がるので、式(35)、(112)の２条件の交差する温度は、ガス球が到達できる最高温度を与える。密度を消去すると、縮退が始まる温度$T_{\rm deg}$は、

$$T_{\rm deg} = \frac{2\pi(8\pi\mu_e m_a)^{2/3}\mu^2 m_a^2 m_e G^2}{h^2 k}(\frac{M}{\Phi})^{4/3} \tag{121}$$

で与えられるので、polytropic index を $N = 1.5$ とおいてこの式を質量について解くと

$$M = 0.023(\mu^3\mu_e)^{-1/2}T_6^{3/4} \tag{122}$$

この式に、水素核反応に必要な温度として$T \simeq 2\times 10^6$ K を代入する（$\mu = 0.61$、$\mu_e = 1.2$）と、主系列星の下限質量が$M \simeq 0.08M_\odot$が求まる。質量が$0.08M_\odot$以下のガス球では、中心で水素核燃焼に点火する前に電子の縮退が始まり、そのまま、温度が冷えて、電子縮退で支えられたガス球へと進化することになる。これらの恒星の冷却は、Kelvin-Helmholtz の時間尺度

$$\tau_{\rm KH} \equiv (GM^2/R)/L \simeq 3\times 10^7(M/M_\odot)^2(R/R_\odot)^{-1}(L/L_\odot)^{-1}\ {\rm yr} \tag{123}$$

で進むが、低質量星は、光度が低い($L \propto M^{3\sim 4}$)ために~ 10 Gyrのオーダーでゆっくりと冷えてゆくことになり、また、表面温度も低いため、褐色矮星（brown dwarf）として観測される。質量が上限値に近い場合は、重水素の核燃焼は起きるが、その場合も、中心温度が上昇するわけではないので、p-p chain reactions には点火することなく、そのまま冷えて水素から成る白色矮星になる。

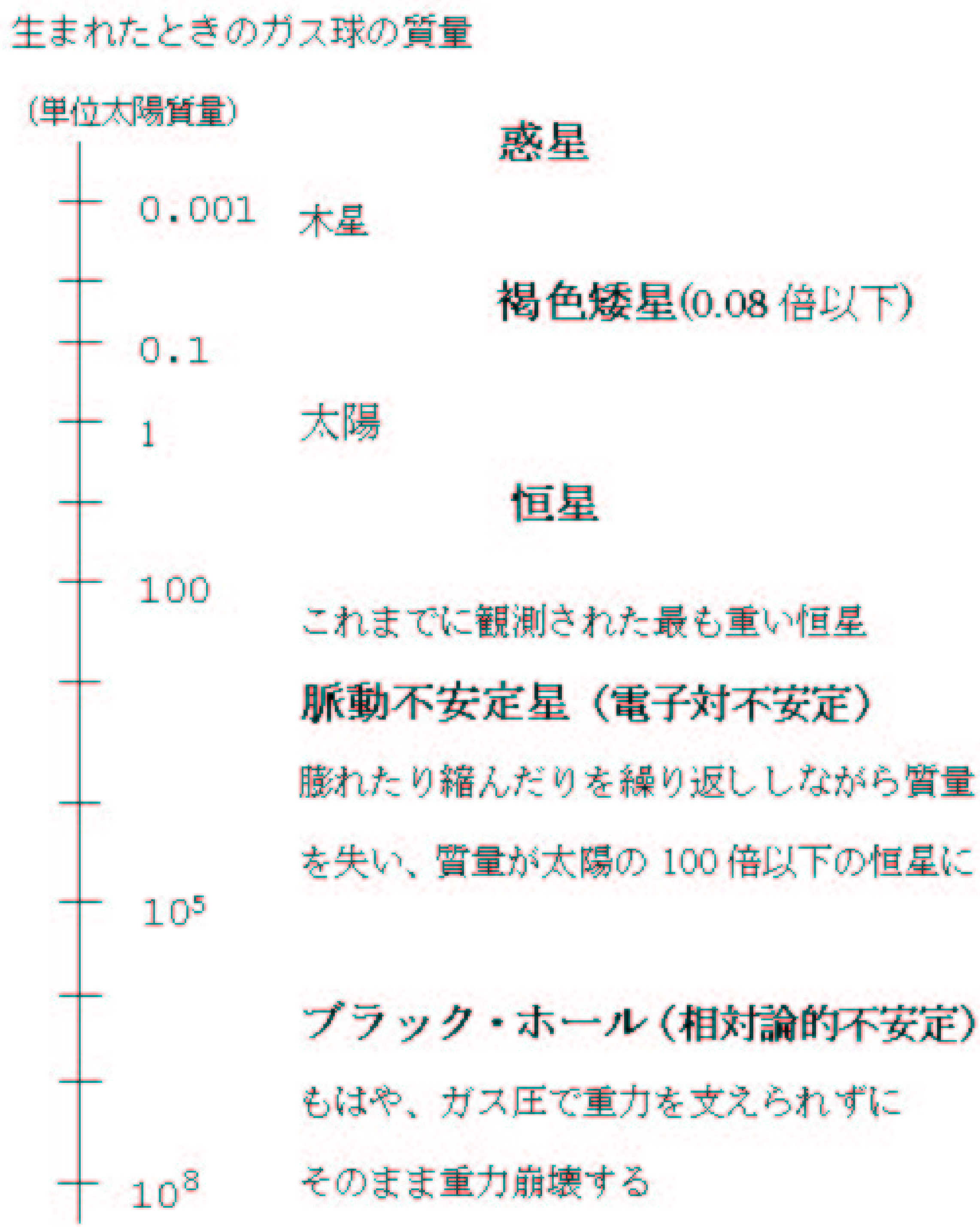

図 13 球対称自己重力系天体の運命。褐色矮星以上の重い天体はガス雲の重力収縮によって形成されるが、その振る舞いは質量によって異なる。太陽の 0.08 倍以上のガス球は中心で核反応に点火、恒星となる。太陽質量の 100 倍位以上の大質量星は、主系列段階に脈動不安定によって質量を失って軽くなり、鉄分解によって重力崩壊し超新星爆発を、あるいは、その前に電子対発生で不安定になり超新星爆発を起こし、さらに重い場合は、重力崩壊して black hole になる。最も軽い惑星は、恒星の誕生時に、その星周のガス円盤中でのダストの凝集によってできる固体物体が衝突合体して成長、木星のように重いものはさらにその周りのガスを降着して形成される。

7 殻燃焼の物理 II — 巨星分枝への進化と Shell Flash

7.1 外層の膨張と核反応生成物の浚渫

核燃料が燃え尽きた中心核は、その質量が Schörnberg-Chandrasekhar 限界を超えた段階で、中心核からのエネルギー流出に伴い、重力収縮が熱輸送の時間尺度で進むことになる。水素燃焼後のヘリウムの中心核の場合、この重力収縮は中心でヘリウム燃焼に点火し、次のヘリウム燃焼の段階が始まるまで続くことになる。図13の上図は太陽質量の5倍、太陽と同じ種族Iの組成をもつ恒星の光度と水素燃焼およびヘリウム燃焼によるエネルギーの発生率の時間変化である。中心対流層で水素が燃え尽き水素殻燃焼の段階への移行は光度の増加となって現れるが、このモデルでは、中心対流層の質量が Schörnberg-Chandrasekhar 限界を上回っているので、そのまま、中心部は重力収縮を続けることになる。

この中心部の収縮に対する恒星の全体の構造の反応は、燃焼核の存在のため複雑になる。核反応の温度依存性が強いので収縮による温度上昇は膨大な核反応率の増加をもたらし、その結果、輻射圧が増大し外層を膨張させることになるため、燃焼殻は中心部の収縮にはついていけない。それゆえ、燃焼殻の温度はほぼ一定に停まらざるを得ず、中心部の収縮に伴い燃焼殻の密度は減少するため、圧力も減少することになり、この減少した圧力で外層を支えるために、逆に、外層を膨張させてその重みを減らすことによって、力学的な調整することになる（図４参照）。外層の膨張に要する仕事のため光度は減少するが、表面温度が低くなり赤色巨星分枝に達すると膨張に要する仕事が減少し、やがて、光度は水素殻燃焼によるエネルギー発生率と均衡を保つようになり、増加傾向に転じる。この半径の膨張は、図10に示したように $U-V$ 面上ではループをもつ構造に対応する。やがて中心でヘリウム燃焼に点火するが、この重力収縮の段階に要する時間は ~ 3 Myr であり、恒星の寿命と比べて短い。

ヘリウム燃焼が始まると、3α 反応は温度依存性が強いためエネルギー発生の中心集中が強く中心部に対流が発生することになる。それに伴い中心部の polytropic index が $N \simeq 3$ から $N \simeq 1.5$ へと減少することになるが、これは密度の中心集中の減少となる (図２参照)。この後中心でのヘリウムの燃焼と外層の底での水素殻燃焼が共存し、熱的に安定で推移し、この間（主系列段階も含めて）光度はほぼ一定に保たれることになる。この間、水素殻燃焼による中心核の質量の増加と対流層内のヘリウムの組成の減少のためヘリウム燃焼率は増加する。一方水素核燃焼はほぼ一定にとどまるが、ヘリウム燃焼の増加につれて減少傾向を示すことになる。

中心でヘリウムが燃え尽きると炭素と酸素からなる中心核が形成される。ヘリウム対流と、中心核は再び重力収縮を開始し、ヘリウム層の底で殻燃焼が始まる。水素殻燃焼の場合と同様に、中心核の重力収縮とヘリウム殻燃焼のため、ヘリウム層を含む外層が膨張することになるが、その結果、水素殻燃焼は温度が下がり鎮火して、ヘリウム殻燃焼で支えられるヘリウム殻燃焼段階へと移行する。炭素と酸素の中心核の重力収縮が進むと、中心部で電子縮退が始まり、恒星は再び電子縮退核と発達した表面対流層を持つ構造となり、赤色巨星分枝の上方へと近づき、漸近巨星分枝段階に達する。

一方、低質量星の場合、中心水素燃焼の対流核の質量が小さく、特に、温度依存性の弱い p-p 連鎖反応が支配的な場合には対流にはならず輻射平衡で燃える。そのため、中心で水素が燃え尽きた段階で中心核の質量は Schönberg-

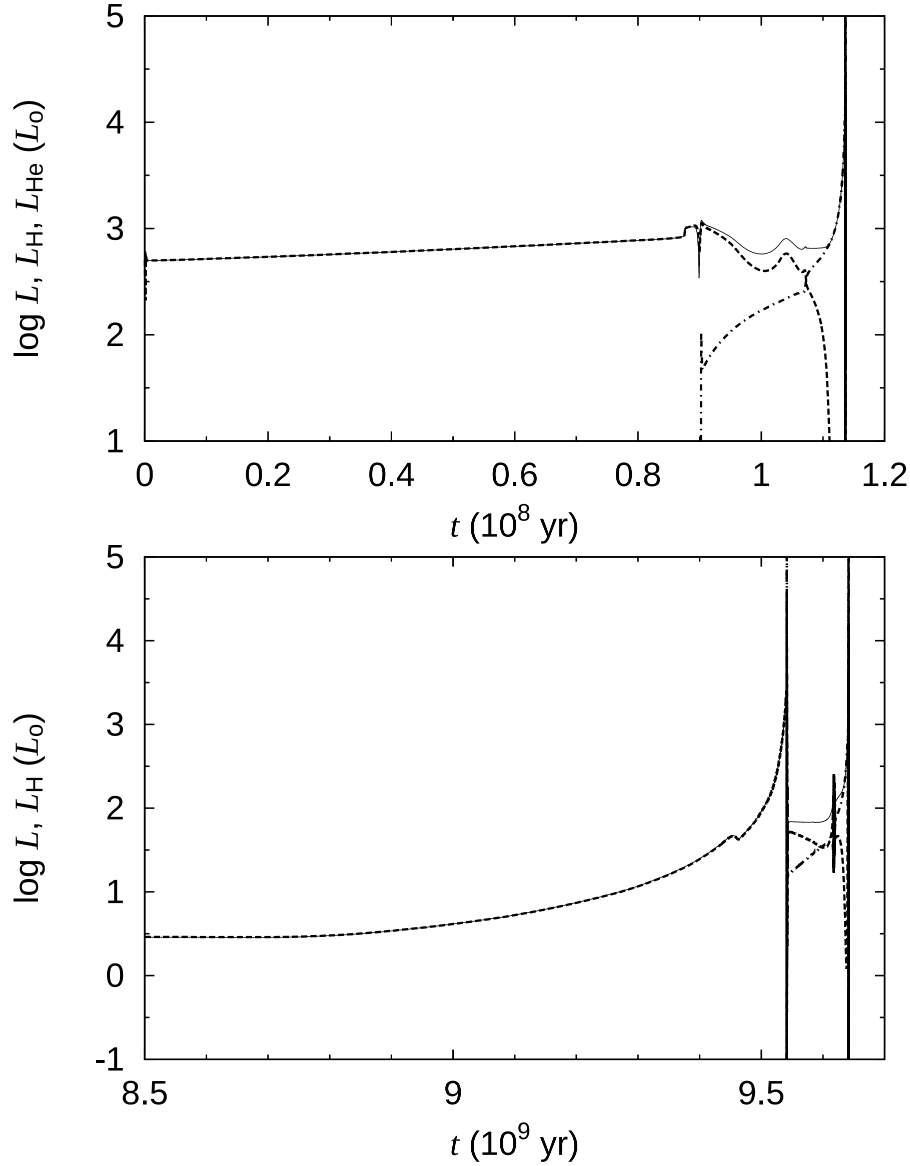

図13. 種族Iの恒星の光度 (L:細実線) と水素燃焼およびヘリウム燃焼によるエネルギー発生率 ($L_{\rm H}$:破線、$L_{\rm He}$:一点鎖線) の時間変化。上図は質量 $5M_\odot$ 星について主系列に到達した段階 (ZAMS) から赤色巨星段階、ヘリウム中心燃焼を経て漸近巨星分枝に到達し熱パルスが発生するまで、下図は太陽質量の星のについてヘリウム中心核の質量が Schönberg-Chandrasekhar 限界を超えた段階から漸近巨星分枝までを示した。

Chandrasekhar 限界以下であり、中心核は一旦等温構造に落ち着き、その後、水素の殻燃焼によってその質量が Schönberg-Chandrasekhar 限界を超えた段階で重力収縮を開始することになる。低質量の場合は温度に比して密度が大きいので、この重力収縮の途上で、ヘリウム中心核でヘリウム核燃焼に点火する前に縮退の条件 (112) に達し中心部で電子縮退が始まるが、電子の縮退圧がイオンの圧力を上回るようになると、圧力は電子密度のみで決まり、温度に依存しなくなるので、力学構造は熱輸送によるエネルギー損失の影響を受けなくなる。この結果、熱輸送の時間尺度での重力収縮は止まることになるが、電子の縮退圧で支えられるガス球の半径は質量の関数なので (5章参照)、水素の殻燃焼によって質量が増加するとともに、中心核は圧縮されて核

燃焼の時間尺度でゆっくりと重力収縮を続けることになる。図13下図は太陽質量の恒星について重力収縮開始後の進化を示したものであるが、この中心核の収縮に伴って、外層が膨張して赤色巨星分枝に達っし、中心核で電子が縮退した後は、燃焼殻の重力が増加するため、水素殻燃焼率も上昇し、恒星の光度も増し、赤色巨星分枝を登っていくことになる。

電子が縮退した中心核では「正の比熱」になっている。したがって、熱的状態は、エネルギー損失による温度下降が中心核の質量の増加に伴う圧縮による温度上昇と釣り合う状態を保ちながら推移することになる。特に、中心部での密度が大きく、ニュートリノのよる損失が効いてくると、中心温度は下がり、中心核の温度分布に逆転が起こり、恒星内部での最高温度は外側の球殻に移動する。中心核の質量の増加は殻燃焼によるが、中心核の質量の増加とともに燃焼率が上昇するので、圧縮率が大きくなって中心核の温度が上がっていくことになり、やがてヘリウム燃焼に点火する。核反応に点火すると、「正の比熱」の状態なので、thermal runaway が起き、中心核の温度が上昇し、やがて、「負に比熱」になると、膨張して安定なヘリウム燃焼に移行する。

殻燃焼に移行し、外層が膨張すると、温度が下がり表面対流層が深くなる。最初に赤色巨星分枝へ進化するときには、電子縮退したヘリウム中心核の周りの水素外層の底で水素殻燃焼が起きるため、その上の部分的に水素燃焼を蒙った物質がくみ上げられることになる。同じ現象は、ヘリウム殻燃焼で漸近巨星分枝へ進化するときにも起こるが、この場合は、消えた水素燃焼殻を越えてヘリウム層に進入するため、水素燃焼で合成されたヘリウムおよび CNO サイクル等で変成された物質が表面へ汲み上げられる。赤色巨星分枝への進化の段階で起きる前者を第1浚渫 (first dredge-up)、漸近巨星分枝への段階で起きる後者を第2浚渫 (second dredge-up) と呼び、このため、表面のヘリウム量が増加し、炭素、後者の場合は酸素がの表面組成が減少し、窒素の表面組成が増加することになる。

7.2 漸近巨星分枝星とヘリウム殻燃焼の熱パルス

漸近巨星分枝段階のヘリウム殻燃焼は、その底での核反応による消費と上からの表面対流層による浚渫 (dredge-up) のためヘリウム層が削られて薄くなるにつれて減少していく。同時に、ヘリウム殻燃焼が消えてゆくとともにヘリウム層が収縮、水素外層の底の温度が上昇するので、水素殻燃焼率が増加してやがてヘリウム殻燃焼に取って代わることになる。水素燃焼殻が主要にエネルギーを供給するようになるとヘリウム殻燃焼の減速が加速されていくことになる。水素燃焼率がヘリウム燃焼率の $10X_\mathrm{s}$ (X_s は外層の水素組成は) 以上になると (単位質量の水素から解放されるエネルギーはヘリウムのそれの10倍であることに注意)、ヘリウム層の質量は減少から増加に転じることになり、ヘリウム層が十分に厚くなると再びその底でヘリウム殻燃焼に点火することになる。ヘリウム殻燃焼が始まるとヘリウム層は膨張し、そのため水素殻核燃は温度が下がって消えて、ヘリウム殻燃焼だけになる。ヘリウムが消費されるとまた水素殻燃焼が始まり、その後ヘリウム殻燃焼と水素殻燃焼を交互に繰り返していくことになる。図14にこの水素とヘリウムの２重殻燃焼の段階の光度と殻燃焼のエネルギー発生率の時間変化を例示したが、ヘリウムから水素殻燃焼への変換はスムースに起きるのに対し、水素殻燃焼からヘリウム殻燃焼への移行はヘリウム殻燃焼の熱的な暴走を伴い、短時間のエネルギー発生率は急増し熱パルスが発生することになる。この段階を熱パルス漸近巨星分枝 (Thermally-Pulsating AGB) と呼び、それ以前の初期漸近巨星分枝段階 (Early AGB) と区別する。

漸近巨星分枝での2重殻燃焼の段階でヘリウム殻燃焼が熱的に不安定になり、runaway を起すことは Schwarzschild と Hähn (1964) によって発見された。それまで電子縮退の下では核反応が暴走することは知られていたが、この場合は電子が縮退していない状況のもとでも起き、点火前の燃焼殻が幾何学的に薄いことに起因するため thin shell instability と呼ばれた。核反応は温度依存性が大きいので、殻燃焼は、pressure scale heigh H_P より狭い領域に限定される。したがって、thin shell、すなわち、燃焼殻の pressure scale height が半径 r に比

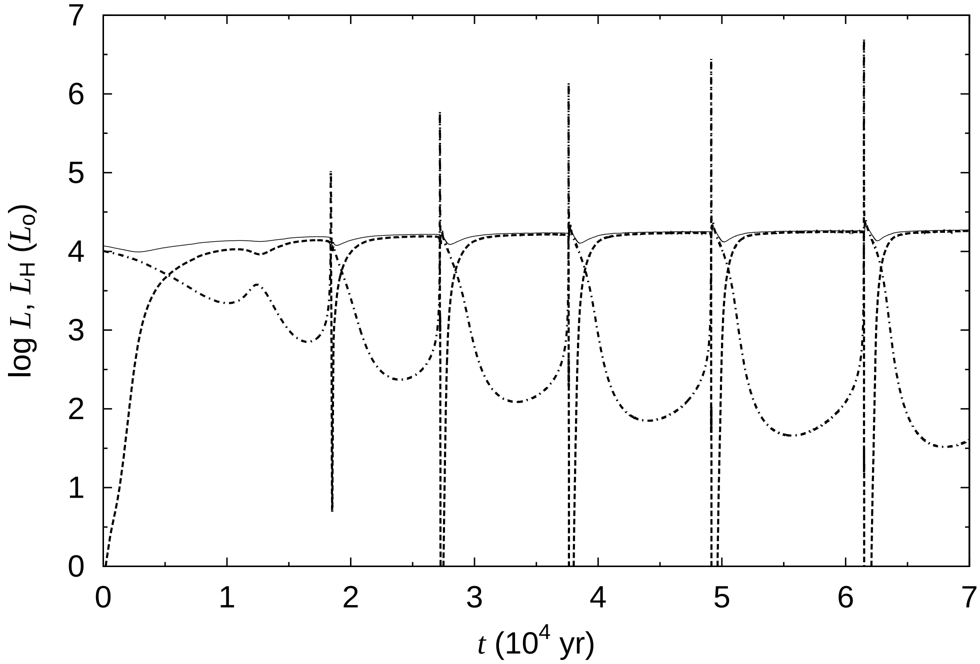

図14. 初期漸近巨星分枝(EAGB)から熱パルス漸近巨星分枝(TP-AGB)段階での光度(L: 細実線)と水素燃焼およびヘリウム燃焼によるエネルギー発生率($L_{\rm H}$: 一点鎖線、$L_{\rm He}$: 破線)の時間変化。モデルは質量$5M_\odot$種族Iの恒星。

べて十分小さい$(H_p/r = 1/V \ll 1)$ときには、核反応が起きて燃焼殻が膨張しても半径そのものに殆ど影響がないため外層の重みは変らず燃焼殻の圧力は不変にとどまることになる。それ故、燃焼殻の比熱は低圧比熱と等しく正となり、核反応は熱的に不安定で、点火すると暴走することになる。点火の条件は、圧力一定の条件下で温度の変動に対して核反応の応答が熱輸送による熱損失の応答を上回ることである。熱的な暴走が起きると温度が上昇して核反応によるエネルギー発生率が大きくなる。燃焼殻は核反応で発生するエネルギーを吸収して膨張するので、H_p/r比が増加、あるいは、Vが減少する。その結果、燃焼殻の膨張が半径に比して無視できないようになると、外層の重みが減少し、圧力降下をもたらすので、「負の比熱」の状況が招来されることになる。「負の比熱」のもとでは、核反応は熱的に安定になり、核反応で発生するネルギーを吸収するとともに燃焼殻の温度は降下して、核反応率も鎮火、殻燃焼によるエネルギー発生率と熱輸送によるエネルギー損失が釣り合う準定常状態が実現することになる。この核反応の暴走現象は熱パルスあるいはshell flashと呼ばれる。実際の熱パルスでは対流層が発生するので、燃焼殻以外への影響も考慮して構造を解く必要がある。

熱パルス中の燃焼殻は比熱が負から正に転換する点で最高温度に達し、ヘリウム燃焼率は図14に示したように大きく変動する。にもかかわらず、殆どのエネルギーはヘリウム層で吸収され、恒星の表面光度はほぼ一定にとどまる。このためヘリウム殻燃焼と水素殻燃焼が支配する期間は、単位質量あたりの核反応で解放される核エネルギーの量に比例し、後者が圧倒的に長くなる。中心核の熱的な状態は殻燃焼による質量の増加に伴う中心核の圧縮率に依存するが、ヘリウム殻燃焼のE-AGBに比べてTP-AGBでは水素殻燃焼で決まるようになるため、圧縮率はかなり小さいことになる。したがって、中心核、特に、ヘリウム殻燃焼が起きる上層部はだんだん冷えていくことになり、この温度の降下のためヘリウム殻燃焼の点火により大きな密度、したがって、より多くのヘリウム層の質量が必要となり、熱パルスの回帰周期がだんだん伸びてくる。また、ヘリウム燃焼殻の圧力も上がるため熱パルスはだんだん強くなっていく。

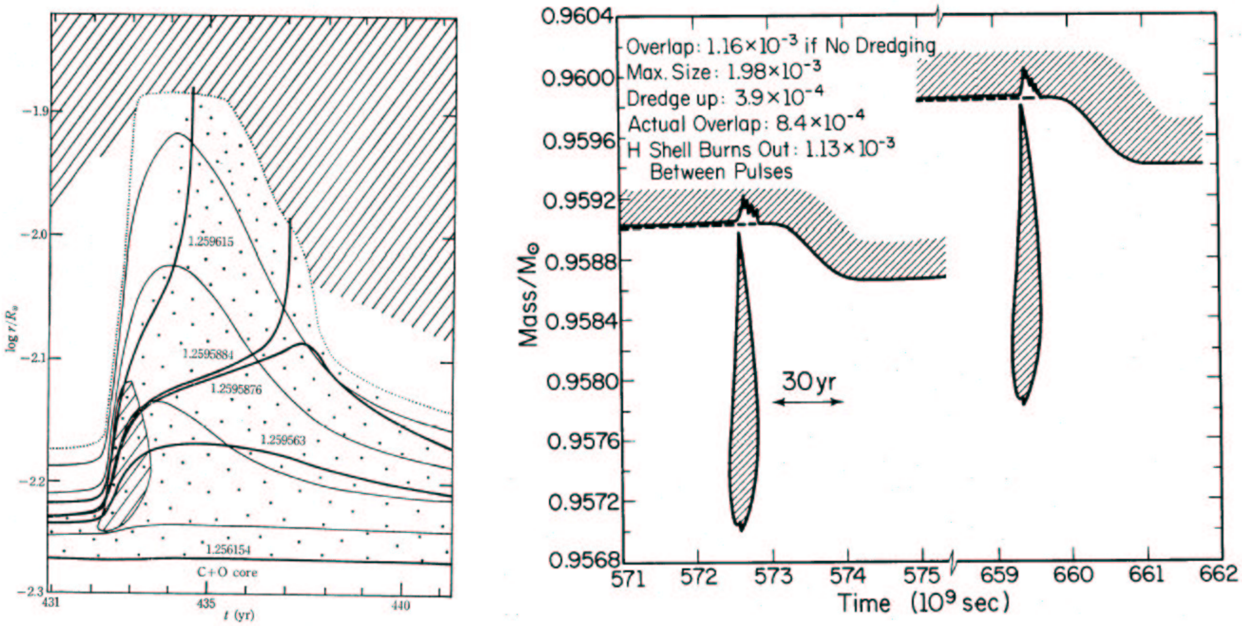

図 15. 熱パルス中の物質混合。斜線部は対流を表す。左図の縦軸は半径で、太実線はヘリウム・フラッシュでヘリウム層の物質が膨張し、表面対流層に突入する様子を表す (Fujimoto, Nomoto & Sugimoto 1976, PASJ)。右図が縦軸が質量座標 (各殻の内側に含まれる質量を表す) でフラッシュ中の対流層と表面対流層に巻き込まれる領域を示したもの (Iben 1976 ApJ)。

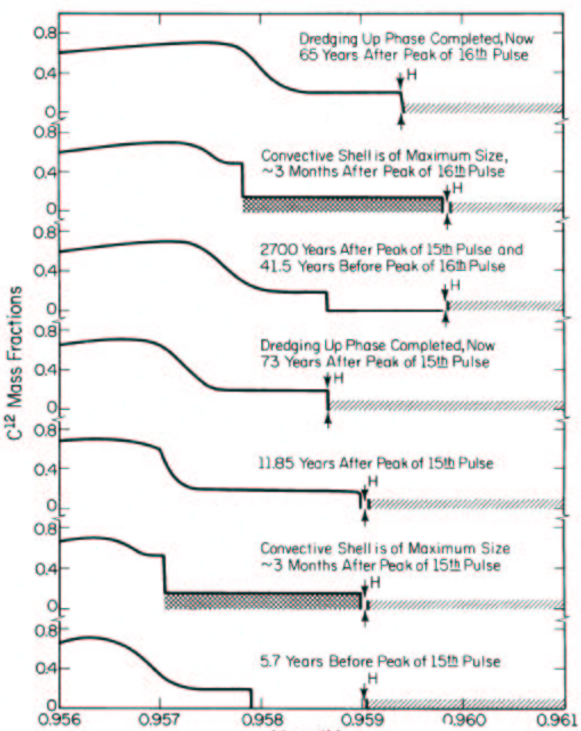

図 16. 熱パルス中の物質混合の進行。ヘリウム層を含む水素外層の下部（右方）から炭素と酸素からなる中心核の上部にかけての ^{12}C の分布の時間変化を質量座標の関数に対するで示す。時間順序は、一番下の 15 番目のパルスの点火前、ヘリウム対流層が最大になった段階、ヘリウム対流が消えた段階、表面対流層によるヘリウム層の浚渫 (third dredge-up)、水素殻燃焼によるヘリウム層が成長、16 番目のパルスでヘリウム対流層が最大になった段階を経て、一番上の 16 番目のパルスの表面対流層による浚渫の終わりまで (Iben 1976 ApJ)。

図 15 は熱パルスに伴うヘリウム層での物質混合の進行を示したものである。斜線部は対流層を表す。左図はヘリウム核反応の熱的暴走に伴い燃焼殻の上のヘリウム層に対流が発生、この対流層は水素を含む外層には届かないが、対流が消えた後も対流層の跡の上層部の物質は、暖められて膨張し、

温度が下がって表面対流層に突入することになる。左図は、対流層の境界の変動を質量座標で表したものである。フラッシュ時の対流層の広がりとフラッシュの納まった後の表面対流層の侵入ともフラッシュが強くなると大きくなり、図にあるように、ヘリウム核反応に曝された物質のかなりの部分が表面へ汲み出されることになる。図16に、ヘリウム層の炭素分布の時間変化を示した。下から、水素殻燃焼によってヘリウム層が成長、フラッシュが起きると新たに付加された層も含めてヘリウム層の殆どが対流層に巻き込まれ、3-αで合成された炭素で汚染される。このとき、同時に対流が発生する前あるいは対流内で生成されたs-過程元素も対流層内にばら撒かれる。フラッシュ対流が消えた後、表面対流層が深くなって(実際には、ヘリウム層が膨張して)、既に消えている水素燃焼殻を越えて、ヘリウム層に侵入する。熱パルスが繰り返すうちに中心核が冷えて熱パルスが成長して強くなると、表面対流はヘリウムの熱パルス中に発生した対流層の跡に達し、これらの核種合成物が表面へ運び出されることになる。この熱パルスに伴う元素の汲み上げはIben(1975) によって見出されたが、第3浚渫 (Third Dredge-up) と呼ばれ、表面組成で炭素が酸素より多いN型炭素星やs-過程元素に富んだS型星など化学特異星の形成機構と考えられている。

7.3 有限振幅の shell flash の理論

7.3.1 燃焼殻の構造と *flatness parameter*

第3章の相似不変量による構造解析で見たように、赤色巨星分枝や漸近巨星分枝の外層は中心集中型の解に対応し、その底の燃焼殻では、密度が平均密度に比して小さく、$U \ll 1$ となる。したがって U の高次の項を無視すると、静水平衡の式 (58) は積分できて

$$U = U_1 \left(\frac{V_1}{V} \right)^N \left(\frac{1-[N+1]/V}{1-[N+1]/V_1} \right)^{3-N} \tag{124}$$

となる。ここで U_1、V_1 は燃焼殻の底での値であり、また、polytropic index N については、熱パルス中は対流が発生するので

$$\frac{N}{N+1} = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_{\mathrm{ad},1} = \frac{24-21\beta_1}{32-24\beta_1-3\beta_1^2} \tag{125}$$

で近似できる。最右辺は理想気体と輻射の状態方程式を仮定したものである。この解は $V_1/(N+1)-1 \gg U_1$ の範囲で有効である。上記の解を用いると同じ近似で質量の式 $d\log M_r/d\log V = U/[U+V/(N+1)-1]$ も積分できて、

$$\ln M_r \Big|_1 = \left(\frac{U_1}{V_1} \right) (N+1) \left(\frac{V_1}{N_1} \right)^{N+1} \left(1 - \frac{N+1}{V_1} \right)^{N-3} \int_0^{(N+1)/V_1} (1-t)^{2-N} t^N dt \tag{126}$$

となる。左辺は殻燃焼に巻きこまれた質量で、shell flash の間一定に留まる。したがって、shell flash 中の燃焼殻の底の半径 r_1 の変化を無視すると、

$$P_1 = P_1^* f(V_1, N_1) \tag{127}$$

と書けることになる。ここで proper pressure, P_1^*, は shell flash 毎に決まる定数、f は Sugimoto & Fujimoto (1978) よって導入された flatness parameter である。図17にいくつかの N について V の関数として示した (flatness parameter f の具体的な関数形については脚注[*1] を参照)。燃焼殻が薄い $V \gg 1$ のときは $f \simeq 1$ となり、

[*1] flatness parameter は不完全ベータ関数を用いて

$$[f(V,N)]^{-1} \equiv (N+1) \left(1 - \frac{N+1}{V} \right)^{N-3} \left(\frac{V}{N+1} \right)^{N+1} B_{(N+1)/V}(N+1, 3-N)$$

圧力は燃焼殻の厚さによらず一定のままに留まる。これはflatな平板平行の構造に対応する。しかし、殻の厚さが増しVが小さくなると球殻の厚みの変動が重力に影響を与えるsphericalな構造に移行する。fはV_1の減少関数であり、Vの値にsensitiveになる。図17は数値計算した熱パルス中の圧力降下を燃焼殻の底のV_1の値に対してプロットしたものであるが、fの曲線と相似形になっている。これらのパルスでは圧力が下がると核反応率が落ち、それとともに、輻射の寄与が増加し熱輸送率は大きくなので、両者が釣り合う状態でフラッシュは鎮火することになり、初期の圧力が大きいほどフラッシュ中の圧力降下は大きくなる。特に$V_1 \to N+1$の極限では$f \to 0$となり、外層の重みは消失して、中心核の構造は$V_1 = N+1$を表面条件として決まることになる。[*2]。

7.3.2 重力熱力学的な比熱

固有圧力P_1^*を指定すると、燃焼殻の圧力P_1がV_1の関数として与えられる。また、密度ρ_1もVの定義より

$$\rho_1/P_1 = V_1 r_1/GM_1$$

と与えられる。すなわち、燃焼殻の底の質量M_1と半径r_1、および、固有圧力P_1^*を指定すると、これらの2式によって、flash中の燃焼殻の熱的な状態の軌跡がV_1の関数として一意的に決まることになる。

上記の関係より、fのVへの依存性をϖで定義すると、すなわち、

$$\varpi \equiv d\log f/d\log V \tag{128}$$

で定義され、Nが整数または半整数の場合にはVの陽の関数としてかける。

$$[f(V,N)]^{-1} = 4\left(\frac{V}{4}\right)^4 \ln\frac{1}{1-4/V} - \frac{4}{3}\left(\frac{V}{4}\right) - 2\left(\frac{V}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{V}{4}\right)^3,$$
$$[f(V,N)]^{-1} = \frac{1}{3/V},$$
$$[f(V,N)]^{-1} = \frac{2.5}{8}\left(\frac{V}{2.5}\right)^{2.5}\left(1-\frac{2.5}{V}\right)^{1.5}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{3}\sin^3 2\theta\right].$$

ここで、$\theta \equiv \sin^{-1}[(2.5/V)^{1/2}]$である。一般の$N$の場合は、無限級数に展開できて

$$[f(V,N)]^{-1} = \sigma_{k=0}^{\infty} b_k, \qquad b_0 = 1, b_k = b_{k-1}\frac{k+3}{N+k+1}\left(\frac{N+1}{V}\right),$$

の漸化式で与えられ、この式は、$V > N+1$で収束する。

[*2] 安定な殻燃焼を持つ場合

$$V_1 = N+1$$

がよい近似でなり立つことになる。したがってこれを燃焼殻の境界条件として、中心核の進化だけを追うことも可能で、この方法はsingle star近似と呼ばれる。ただし、外層と中心核には組成の違いがあるので境界条件には外層の組成を用いる。また、もうひとつの表面条件は

$$L_r + L_N = \frac{4\pi GcM_1}{\kappa}4(1-\beta)\left(\frac{d\log T}{d\log P}\right)_s,$$

ここで、

$$\left(\frac{d\log T}{d\log P}\right)_s = \frac{1+(\partial\log\kappa/\partial\log P)_T}{4-(\partial\log\kappa/\partial\log T)_P}$$

$$L_N = \frac{M_1(U/V)_1\varepsilon_{N,1}}{(\frac{\partial\log\varepsilon_N}{\partial\ logT})_\rho(\frac{d\log T}{d\log P})_1 + (\frac{\partial\log\varepsilon_N}{\partial\ log\rho})_T(\frac{d\log\rho}{d\log P})_1 + 4/V_1 - 1}.$$

最後の式は燃焼殻でのエネルギー発生率を燃焼殻の厚さはpressure scaleheightに比して十分薄いとして評価したもので、thin shell approximationと呼ばれている。

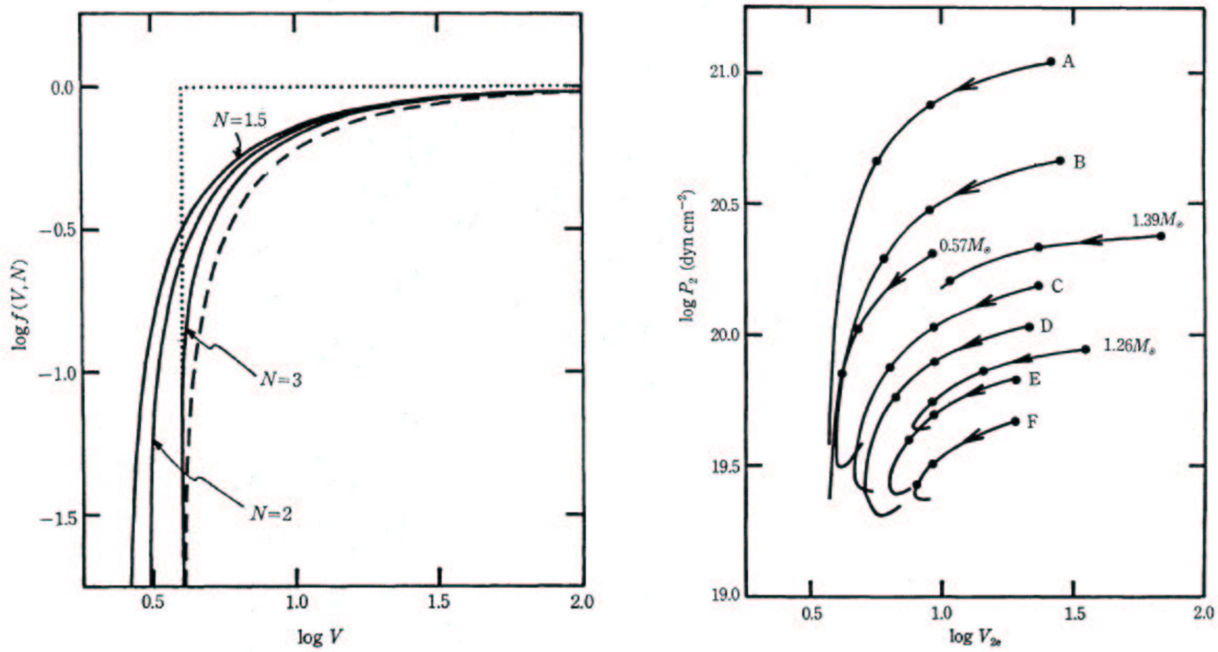

図 17. flatness parameter (左) と熱パルス中の燃焼殻の圧力の変動 (右)。横軸はともに V。(Sugimoto & Fujimoto 1978 PASJ)。

とおくと、圧力と密度の変化は

$$d\log P_1 = \varpi d\log V_1 \tag{129}$$

$$d\log \rho_1 = (\varpi + 1) d\log V_1. \tag{130}$$

これから V_1 を消去すると燃焼殻の状態量の間の関係が導かれ、

$$d\log T = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha\frac{\partial \log T}{\partial \log P}\bigg|_\rho + \frac{\partial \log T}{\partial \log \rho}\bigg|_P\right) d\log P = \left(\alpha\frac{\partial \log T}{\partial \log P}\bigg|_\rho + \frac{\partial \log T}{\partial \log \rho}\bigg|_P\right) d\log \rho \tag{131}$$

となる。したがって、静水平衡の下における球殻の比熱 $c_{\rm gr}$ は

$$T_1 ds_1 = c_{\rm gr} dT_1 = c_P \frac{1 - \alpha(\partial \log\rho/\partial\log P)_{\rm ad}}{1 - \alpha(\partial\log\rho/\partial\log P)_T}. \tag{132}$$

ここで、α は

$$\alpha = \varpi/(1+\varpi) \tag{133}$$

で定義され、球殻の静水平衡下でのガスの振る舞いを具現することになる ($d\log P_1 = \alpha d\log\rho_1$)。$\alpha = 0$ のときは、ガスは定圧の下での通常の熱力学系のように振舞う。homologous な変形の場合には $\alpha = 3/4$ となる。、N の変化を無視すると定義から明らかなように、ϖ はflat の構造のときの 0 からspherical な構造の極限で発散することになり、α は0と 1 の間をとる。したがって、式 (132) の分子は正定値であるが、理想気体と輻射の場合 $(d\log\rho/d\log P)_{T,1} = 1/\beta_1$ となり、$\alpha = \beta_1$ のとき消えて、$c_{\rm gr}$ は発散して無限大となる。

図18にフラッシュ中の燃焼殻の重力熱力学的な比熱 $c_{\rm gr}$ を V_1 および α ともにエントロピーの関数として示した。燃焼殻が薄く $V_1 \gg 1$ のとき、$\alpha \simeq 0$ で比熱は正で $c_{\rm gr} = c_P$ である。燃焼殻が厚くなると $c_{\rm gr}/c_P$ は増加するが、これは膨張とともに重力が小さくなるために、膨張が大きくなり、より多くのエネルギーを要するようになるためである。この間、$c_{\rm gr} > 0$ の間は、温度はエントロピーが増えると増加する。やがて、$c_{\rm gr}$ は無限大になるが、このとき燃焼殻の温度は最大に達することになる。さらに燃焼殻が膨張すると、エントロピーが増

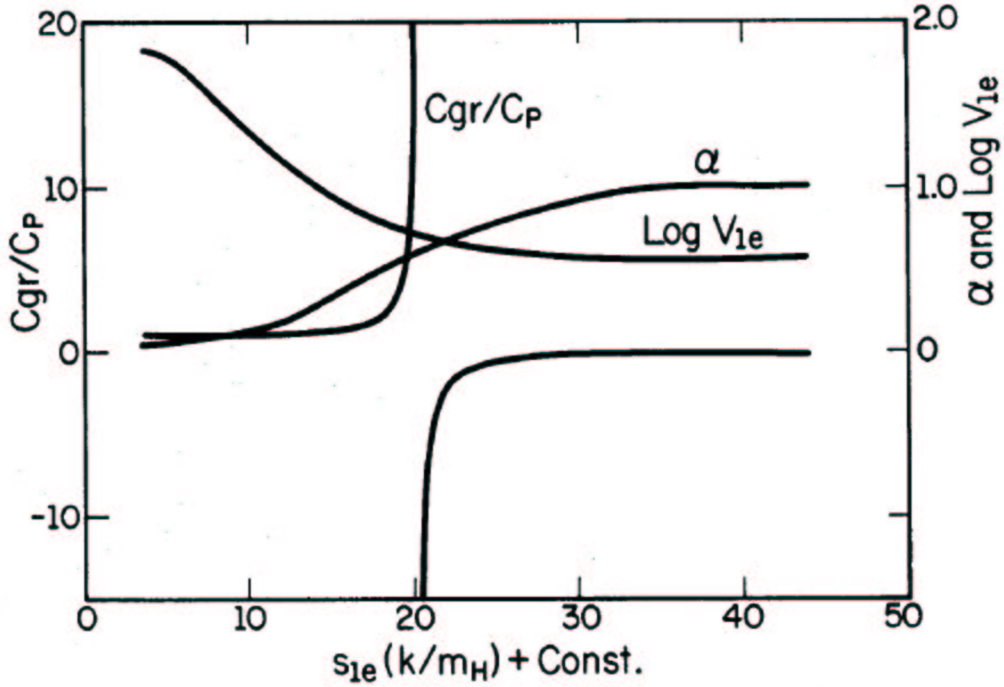

図 18. 燃焼殻の熱力学的特性。燃焼殻のエントロピー s_{1e} に伴う燃焼殻の半径 r と厚さ H_P の比 V_{1e}、圧力と密度のレスポンス $\alpha(= d\log P/d\log\rho)$、および重力熱力学的な比熱 c_{gr}。添え字の e は燃焼殻の外側の組成を用いた量であることを示す (Fujimoto 1982 ApJ)。

加しても膨張に要するエネルギーがガスに加えたエネルギーを上回るようになり、比熱 c_{gr} は負になり、温度は逆に下がることになる。殻燃焼のエネルギー発生率も、燃焼殻が薄い間は温度とともに増加する。しかし、圧力および密度はエントロピーが増加するとともに単調に減少するので、核反応率の密度依存性も考慮すると、最高温度に到達する前に最大値に達し、その後は減少に転じることになる。

7.3.3 Shell Flash の時間発展

燃焼殻のエネルギー収支はエネルギー保存から

$$T\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{M_r} = \varepsilon_N - \frac{\partial L_r}{\partial M_r} \tag{134}$$

で与えられるが、フラッシュの点火の条件は静水平衡のもとでのこの方程式の摂動を取ることによって求めることができる。このため右辺の第2項の熱輸送によるエネルギー損失を

$$\varepsilon_r = \frac{ac}{3}\frac{T^4}{\kappa H_P^2 \rho^2} \tag{135}$$

で近似する[*3]。式達 (131) と (132) を用い、温度勾配の摂動を無視すると摂動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta T}{\partial t} &= \frac{\varepsilon_r}{c_P T} F \delta T \\ F &= \frac{c_P}{c_{gr}}\left[\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_r}\nu - (4-\kappa_T)\right] + \frac{(\partial\log\rho/\partial\log T)_P}{1-\alpha(\partial\log\rho/\partial\log P)_{ad}}\left[\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_r}\eta + (\kappa_\rho + 2\alpha)\right]. \end{aligned} \tag{136}$$

[*3] この近似は半径での微分を pressure scale height での割り算で置き換えることで得られる。

と書ける。ここで、ν と η は核エネルギー発生率の温度と密度依存性, i.e., $\varepsilon_N \propto T^\nu \rho^\eta$、また、$\kappa_T$ と κ_ρ はopacityの温度と密度依存性で $\kappa_T = \partial \log \kappa / \partial \log T$ と $\kappa_\rho = \partial \log \kappa / \partial \log \rho$ である。熱的な安定性は F の符号で決まり、$F < 0$ のとき安定、$F > 0$ のとき不安定となる。

フラッシュの時間発展もenergeticsから求められる。フラッシュ中に発生する対流によるエネルギー輸送の効果を取り入れる必要がある。断熱勾配を仮定して、

$$\begin{aligned}
\frac{ds_1}{dt} &= \frac{1 + \nabla_{\rm ad} - 4/V_1}{T_1 f(V_1, N_1)}(L_N - L_{\rm ph}) \\
L_N &= M_1 \left(\frac{U_1}{V_1}\right) \varepsilon_{N,1} \frac{1}{1 + \nabla_{{\rm ad},1} \nu (N_1/N_1 + 1)\eta - 4/V_1} \\
L_{\rm ph} &= \frac{4\pi G c M_1}{\kappa} 4\nabla_{ad,1}(1-\beta)_1.
\end{aligned} \tag{137}$$

ここで、対流層内の平均温度および核反応率の評価にはthin shell近似を用いた[*4]。この式を解くことによって時間発展が求められる。

同様にフラッシュの終焉は、式 (134) から平衡状態（定常状態）

$$L_N = L_{\rm ph} \tag{138}$$

が実現すると終わることになる。この意味でshell flashはflatな形状のでの平衡状態からsphericalな平衡状態への相転移と考えられる。特に、漸近巨星分枝段階では、水素殻燃焼の巨星からヘリウム殻燃焼の巨星への遷移と位置づけられる。

7.3.4 降着星表面の *shell flash* への応用

燃焼殻の解 (124) を求める段階で使った仮定

$$U \ll 1 \tag{139}$$

は、漸近巨星分枝では水素燃焼の上方の広がった外層の影響を無視することを意味している。図19に示したように水素燃焼殻の内部で構造を表したが、外層の殆どの質量は $U-V$ 平面上の構造線が臨界曲線を下から上へ横切るところに分布することになり、半径が大きく重力が弱くなるためヘリウム層の構造には殆ど影響しない。

白色矮星や中性子星を含む近接連星系では、質量交換でその表面への物質が降着することがある。これらの縮退星は表面重力が大きいので、表面に降り積もった水素やヘリウムに富んだガスの量が増えると、自らの重みで圧縮でその底の温度と密度が高くなり、やがて核反応に点火、熱的な暴走を起こすことになる。この場合は、上記で仮定した状況が実現していて、降着層の構造は式 (124) で求めた解で表されることになり、固有圧力は

$$P_1^* = GM\Delta M_{\rm acc}/4\pi R^4 \tag{140}$$

と、縮退星の質量 M と半径 R、および核燃料の降着層の質量 $\Delta M_{\rm acc}$ でexplicitに書けることになる。白色矮星へ降着した場合は新星爆発や超新星爆発、中性子星の場合はX線burstを引き起こすが、この式は、その強度が表面重力 ($g = GM/R^2$) と単位面積あたりの降着層の柱密度 ($\sigma = \Delta M/4\pi R^2$) で決まることを示している。

[*4]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta M}\int_{M_1}^{M_1+\Delta M} T dM_r &= \frac{M_1}{\Delta M}\frac{U_1}{V_1} T_1 \int_0^{P_1} \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\nabla_{\rm ad} - 4/V_1} d\frac{P}{P_1} = \frac{T_1 f(V_1, N_1)}{1 + \nabla_{{\rm ad},1} - 4/V_1} \\
L_N = \frac{1}{\Delta M}\int_{M_1}^{M_1+\Delta M} \varepsilon_N dM_r &== \frac{M_1 (U_1/V_1)\varepsilon_{N,1}}{1 + \nabla_{{\rm ad},1}\nu + (N_1/N_1+1)\eta - 4/V_1}.
\end{aligned}$$

ただし、ΔM は対流が発生している層の質量 ($= P_1^* 4\pi r_1^4/GM_1$)。

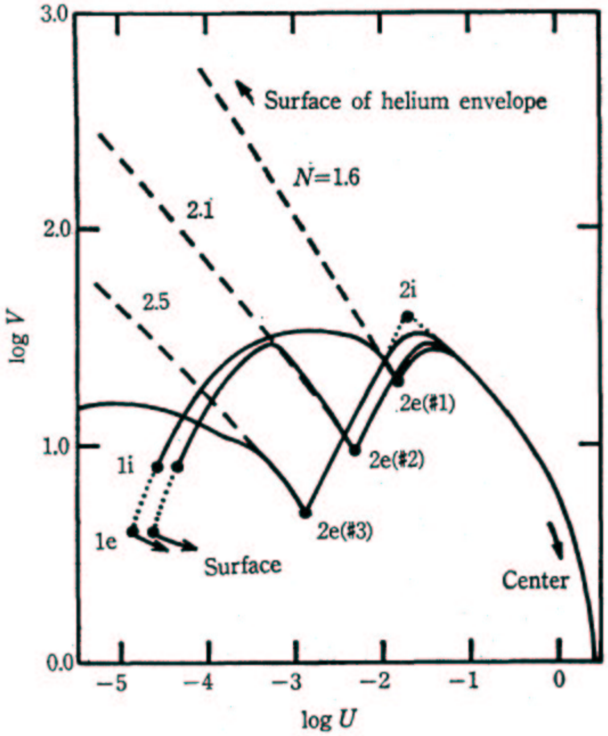

図19. $U-V$ 平面上での漸近巨星分枝のヘリウム層の構造。実線は水素の燃焼殻の内部の中心核の構造を表す。記号1eと1iはそれぞれ水素外層の底とヘリウム層の上端、2eと2iはヘリウム層の底およびヘリウムが燃え尽きた炭素と酸素の中心核の上端をあらわす。破線は式(139)での近似に対応する。ステージ数＃1、＃2、＃3はヘリウム・フラッシュの時間的な進行を表している (Sugimoto & Fujimoto 1978 PASJ)。

図20に応用例を示す。左図の実線は、白色矮星の質量 (M) と降着ヘリウム層 (ΔM_2) を与えた時のヘリウム・フラッシュの中に到達する最高温度の軌跡をしめしたもの。白色矮星の半径は質量の減少関数なので、質量が大きいほど表面重力が大きく、また、降着層の質量が大きいほど柱密度が大きいので、固有圧力が大きく、したがって、到達温度は高く、フラッシュは強くなることを示している。

フラッシュに点火する前の降着層の構造は、白色矮星の場合は降着層の質量の増加に伴う圧縮あるいは安定な殻燃焼が起きる場合にはそれによる過熱が、熱輸送によるエネルギー損失と釣り合うことで決まっている。前者は降着率に比例するので、shell flash の点火に必要な降着層の質量 (あるいは柱密度) は、降着率の関数となる。したがって、降着縮退星での shell flash の強度とその後の運命は、降着星の質量と降着率できまることになる。

右図は中性子星表面での殻燃焼の性質をあらわしたもので、実線は表面重力（各線にその大きさを付記）を与えたときの水素燃焼核の底の温度を柱密度 (σ) の関数として表し、一点鎖線はヘリウム殻燃焼が不安定になる線 ($F=0$) を表す。中性子星の場合は、重力ポテンシャルが深く、熱伝導率がいいので、ベータ崩壊で詰まり核反応率が頭打ちになる水素核燃焼では、温度依存性がなくなるため、安定である。したがって、降着物質の柱密度が増加して、水素燃焼殻の底がヘリウム殻燃焼の不安定線に到達したA点で、フラッシュに点火してX線バーストを引き起こす。あるいは、水素の降着率が小さく、水素燃焼の底がA点に達する前の途中（A点とB点の中間）で殻燃焼率と釣り合ったときは、水素燃焼殻の底の位置はそこにとどまるが、水素が燃えた結果その下に等温のヘリウム層が蓄積され、その底がヘリウム殻燃焼の不安定線に到達した段階でフラッシュを起こすことになる。

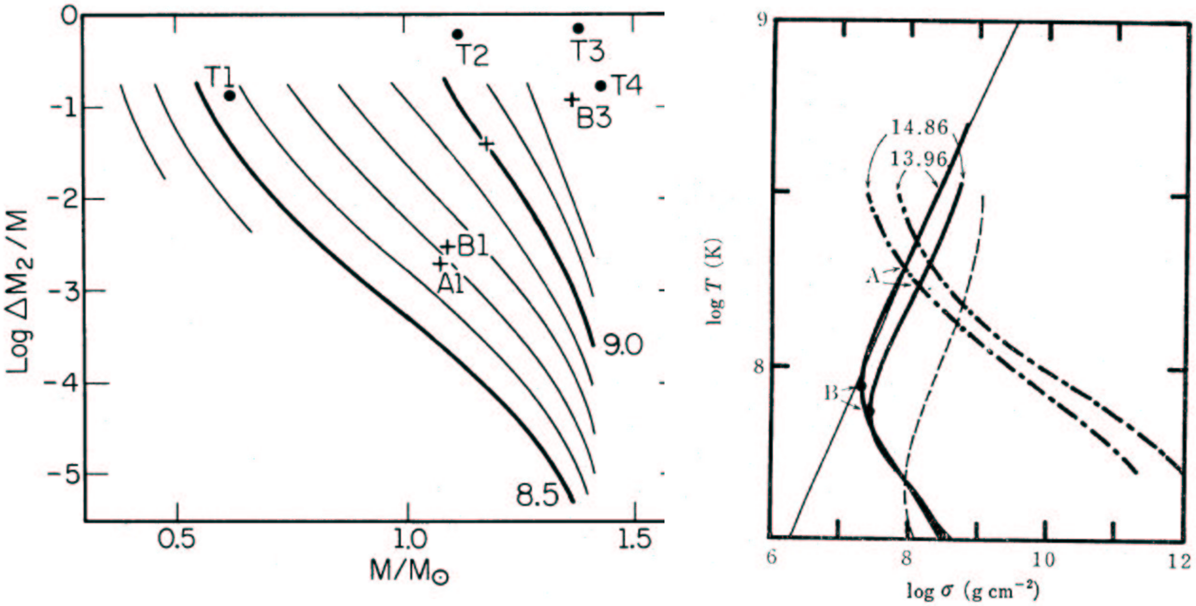

図20. 白色矮星の表面でのヘリウム・フラッシュの強度(左)と中性子星表面での殻燃焼の熱的な安定性（右）。左図の実線は熱パルス中に到達できる最高温度を白色矮星の質量 M と降着ヘリウム層の質量 ΔM 図上に表したもので、付した数字は到達温度の対数 (Fujimoto & Sugimoto 1982 ApJ)。右図は中性子星表面での水素殻燃焼の底の軌跡（実線）とヘリウム殻燃焼の点火線（一点鎖線）を柱密度と温度の図上に示したもの。付記した数値は表面重力の対数(CGS単位) (Hanawa, & Fujimoto 1982 PASJ)。

8　恒星進化の標準理論

8.1　恒星の寿命

質量が $0.08M_\odot$ 以上の恒星は、水素燃焼に点火、主系列に落ち着くことになる。主系列段階の間、恒星の光度はそれほど変わらないので、主系列段階の恒星の寿命は、核燃料の備蓄と消費率で決まることになる。ただし、核反応は中心部の温度の高いところでしか起こらないので、主系列段階で消費できる水素の量を f とすると、

$$\tau = \frac{MXE_{\rm H}f}{L} = 6.8\times10^9(\frac{M}{M_\odot})(\frac{X}{0.7})(\frac{L}{L_\odot})^{-1}(\frac{E_{\rm H}}{6\times10^{18}{\rm erg\ g^{-1}}})(\frac{f}{0.1}){\rm yr} \tag{141}$$

(X と $E_{\rm H}$ はそれぞれ、水素の初期組成と水素はヘリウムに変換するとき単位質量から解放される核エネルギー)。

現在の太陽の光度は、初期に比べて46億年の間に2倍くらいに増えたことを考慮すると、太陽質量の恒星の寿命は100億年ということになる。低質量星では、光度は $L\propto M^{3\sim4}$ なので、寿命は質量の増加とともに $2\sim3$ 乗に反比例して急激に減少することになる。大質量星では、光度は $L_{\rm Edd}$ で与えられる

ので、

$$\tau = 1.8 \times 10^6 (\frac{X}{0.7}) f (\frac{L_{\rm Edd}}{L}) {\rm yr} \tag{142}$$

となるが、対流中心核は大きく、$f \simeq 0.5$ (for $M \sim 20 M_\odot$) あるいはそれ以上になるので、寿命は質量によらずほぼ数百万年程度で一定になる。

主系列での水素燃焼を寿命を終えた後、恒星はnote.3で見たようにヘリウム燃焼以降鉄の中心核の形成に至る核燃焼の生涯を辿り始める。しかし、水素からヘリウムの段階で核エネルギーの約80 %を放出し、さらにヘリウムから炭素と酸素が形成されるとき残りの約半分を放出する。また、中質量星や低質量星では進化の後期に電子縮退中心核ができた段階で光度が大きく増加する。このため、恒星はその生涯の殆どの時間を主系列星として過ごすことになるので、主系列星の寿命が恒星の寿命を与える。

8.1.1 恒星の終末 — 縮退星の形成と超新星爆発

恒星は生まれると、4章で見たように、重力収縮と核反応段階を繰り返しながら水素燃焼から最も束縛エネルギーの大きな鉄からなる中心核の形成への道程を開始する。図2に示した恒星進化の数値計算からとった中心密度と温度の変化は水素燃焼以降のものであるが、恒星として誕生したばかりのガス球は密度、温度とも低く、左下方に位置する。この段階では重力以外のエネルギー源がないので、式 (25) に示したように、表面からエネルギーを放出しながら収縮し、恒星の内部密度とともに温度も上昇していく。

太陽質量の0.08倍以上の恒星は、中心温度が 10^7 K近くなると、クーロン障壁のもっとも小さい水素核融合反応が始まり、中心部での核反応によるエネルギー発生率と表面からのエネルギー放出率が釣り合う状態が実現する。この核燃焼段階は中心部で燃料である水素が燃え尽きるまでほぼ定常的状態に保たれる。この水素燃焼段階の恒星の構造は初期の質量と化学組成だけで決まる。化学組成、とりわけ、炭素以上の重元素の量は輻射の吸収係数とCNOサイクルによる水素反応率を通して表面からのエネルギー放出に影響する。したがって、恒星の進化と運命もこの2つのパラメーターで決まることになる。

中心で水素が燃え尽きると、恒星の内部は、中心部のヘリウムを水素の多い外層が取り囲むという組成分布になる、ヘリウム中心核は重力収縮し、それを取り巻く球殻で水素燃焼が始まる。球殻での燃焼に対しても「比熱が負」の自動制御機構が働き、水素殻燃焼も安定に推移する。殻燃焼の結果ヘリウム中心核の質量が増加するが、Schönberg-Chandrasekhar 限界を超えると、中心核の重力収縮が促進され、やがて中心でヘリウム核反応に点火する。中心部でヘリウム核反応が始まると、再び中心で核反応による発熱率とエネルギー放出率が釣り合った定常状態が実現する。中心部でヘリウムが燃え尽すと、恒星は、炭素と酸素からなる中心核をヘリウム層の球殻と水素の外層が囲むという組成分布になり、この中心核の重力収縮の段階が始まる。このとき、水素の外層とヘリウム層の底ではそれぞれ殻燃焼が進行する。

このように、重力収縮と核燃焼の定常状態を繰り返すのが恒星の進化の基本パターンで、note.3にまとめた炭素燃焼、酸素燃焼、ネオン燃焼、シリコン燃焼の各段階を経て、鉄の中心核の形成に至り、中心部で核エネルギーを使い果たすまで続くことになる。この過程を通して重力エネルギーと核エネルギーを失いながら、恒星の内部は、初期の一様な組成分布をもつ単純な構造から、幾層もの層状の組成分布と燃焼殻からなる複雑な構造へと進化していくことになる。

しかしながら、すべての恒星が前節で述べた鉄の中心核の形成に至る道程を最後まで辿れるわけではない。これには「負の比熱」が必要条件であって、それが破れれば、進化はその段階で止まる。比熱が正になれば、恒星はいわば巨大な核爆弾と化すことになるが、そのまま不発弾として冷えていくがあるいは核爆発を起こして最後を迎えることになる。一方、首尾よく鉄中心核の形成に至った場合は、中心部の核エネルギーを使い果たし、その後は重力エネルギーのみとなる。重力収縮を続けると、その途上で動的な不安定性に遭遇し、重力崩壊に引き起こして一生を終えることになる。恒星の

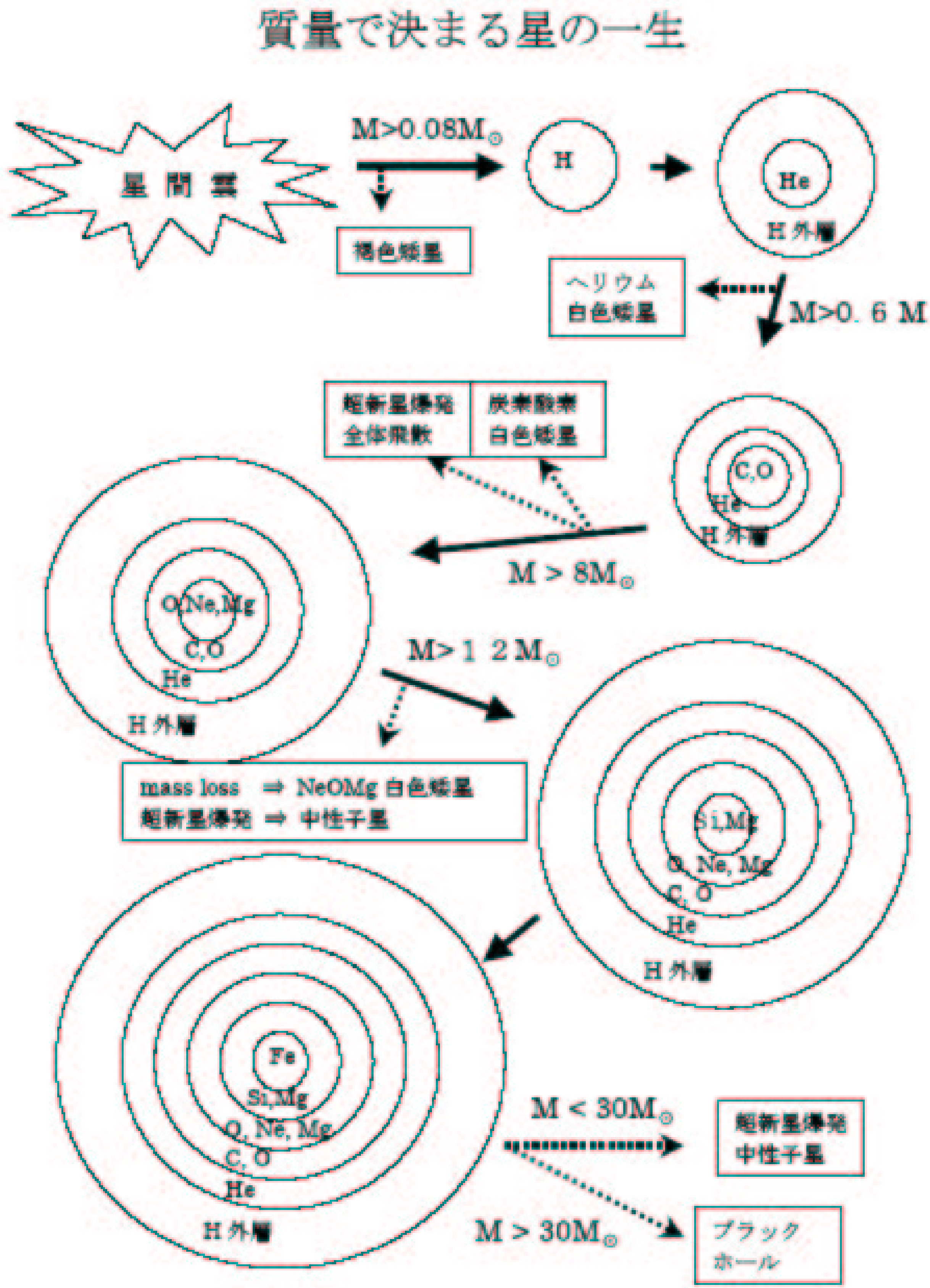

図21球対称な構造、熱対流での物質混合、質量放出を考慮した恒星の進化の標準的な描像。

終末はこの3つの型に分類される。図21は太陽と同じような初期の化学組成をもつさまざまな質量の恒星について、その進化と終末をまとめたものである。

8.1.2 縮退星＝核爆弾としての最後

「比熱が負」が成り立つ要件を調べるために3章の議論を振り返ってみよう。恒星の力学的な構造をきめているのは圧力と密度であり、温度がかかわるのは状態方程式を通してである。理想気体の場合には圧力は温度に比例する。しかし、電子はフェルミ統計に従うので、温度の割に密度が高くなるとパウリの排他律が効いて、圧力は密度だけ決まり、温度によらなくなる。このような状態は電子縮退と呼ばれるが、熱の出入りによる温度変化はもはや圧力すなわち力学的な構造に影響しなくなるため、比熱は正となり、自動制御機構は働かなくなる。電子縮退は質量が小さいほど早い段階で始まる。太陽質量の約2.5倍までの低質量星は、水素殻燃焼でヘリウム中心核が成長する途上で、また、約８倍までの中質量星はヘリウム燃焼を経て炭素と酸素の中心核が形成された段階で、11倍までの恒星はさらに炭素燃焼を経て酸素、ネオンとマグネシウムの中心核が形成された段階で、それぞれ中心核で電子の縮退が始まる。

「比熱が正」になった恒星には２通りの運命が待っている。ひとつは、そのまま冷却していく場合で、縮退圧で支えられた白色矮星になる。もうひとつは、縮退した中心核で核反応に点火した場合で、核反応は暴走する。核反応に点火するかどうかは、中心核の圧縮に伴う温度上昇とエネルギー損失による冷却の競合で決まる。

ヘリウム中心核の場合、クーロン障壁が小さいので、中心核の質量が太陽の約半分くらいになった段階でヘリウム核反応に点火する。これに対して、炭素と酸素の中心核では、ニュートリノによって効率よく冷やされるため、炭素核反応の点火は中心核がChandrasekharの臨界質量近くになるまで待たされることになる。縮退のもとでは核反応は点火すると暴走するが、その結果は縮退の強さによって異なる。縮退が弱いヘリウム燃焼の場合は、shell flashのところで見たように、核反応によるエネルギー発生率はいったん急増するが、温度が上昇するとやがて縮退が融けて「負の比熱」の状態を回復し、温度が下がって、核反応の定常状態が実現する。図２で太陽質量および2倍の太陽質量の恒星は、ヘリウム点火直後、中心密度と温度が一たん下がっているが、これは、中心部の温度がニュートリノ冷却によって低くなり、ヘリウム燃焼が中心を外れた球殻上で始まるためで、フラッシュによって外部の重みが減少するので中心部は断熱膨張を経験することになる。これに対し、縮退が強い炭素と酸素の中心核の場合、縮退が融ける前に重力エネルギーを上回る核エネルギーが発生し、星全体が吹き飛ぶことになる。これが爆燃型、あるいは、爆轟型とよばれる超新星爆発の一形態である。酸素、ネオンとマグネシウムの中心核の場合は、ネオンの電子捕獲によるChandrasekharの臨界質量の減少によって中心部の崩壊が始まるが、核エネルギーが少なく中心核を吹き飛ばすのに足らないので、重力の束縛が小さい外層は吹き飛ばされるが、中心部はそのままつぶれて中性子星としてなる。

恒星の進化を左右するもう一つの要素は質量放出である。核反応に点火するためには縮退後も殻燃焼が続き中心核の質量は増加することが要件である。しかし、恒星の表面からは、膨大なエネルギーを輻射として放出しているので、その輻射エネルギーの一部を使って表面からのガスの噴出が起きていることが観測されている。太陽の場合も、高速の陽子などが地球軌道まで飛来し、太陽風として観測されている。このガスの放出効率は進化の後期になり、光度が大きくなるとともに増大する。それとともに、外層が膨張して温度が下がると動力学的に不安定になって脈動がおきるが、半径が大きくなるとともに、その振幅か大きくなり、それに伴って表面で衝撃波がたって、外層の放出率が大きくなると考えられている。この質量放出によって外層の質量が剥ぎ取られて殻燃焼が消えれば、その時点で中心核の成長が止まり、恒星は白色矮星となる。例えば、水素殻燃焼の場合、中心核の質量にもよるが、外層の質量が$\sim 1/10,000$になると消える。外層を剥ぎ取られて薄くなると、外層が収縮し、恒星の表面温度が高くなって、放出された物質が中

心星からの紫外線に照らされて輝き始め、惑星状星雲となる。この後、殻燃焼が消えて、冷えていくことになる。この進化は低質量星に加えて中質量星の大部分も当てはまると考えられ、太陽質量の11倍以下の恒星は白色矮星に進化するとされる。白色矮星の組成は、初期質量が、太陽の0.5倍以下の星はヘリウム、8倍以下は炭素と酸素、それ以上は酸素、ネオンとマグネシウムとなる。

こうして誕生した白色矮星は核エネルギーを内蔵したままのいわば不発弾である。この白色矮星が近接連星系に属する場合、伴星との距離が小さいので、伴星からのガスの流入が起き、水素に富んだ流入ガスが白色矮星に降り積もると、核反応の再点火があり得る。表面に降着した物質中で水素核反応に点火した場合は、核反応の暴走に関与するのが表面層のみである。したがって、爆発の規模もそれほど大きくなく、この現象は新星爆発として観測される。

これに対し、ガスの降着に伴う圧縮によって、中心部で炭素燃焼の核反応に点火した場合には、星全体が吹き飛ばす爆燃型あるいは爆轟型の爆発が誘起されることになる。これはＩａ型として分類される超新星爆発の機構と考えられている。酸素、ネオン、マグネシウムの場合は、大部分が中性子星として残るため、超新星爆発の規模としては小さく、silent supernovaとなると考えられている。

8.1.3 重力崩壊—中性子星とブラック・ホールの形成

高質量星の場合、中心部で核燃料を消費し尽くして鉄が形成された後も、重力収縮は続き、その結果中心部の温度は上昇していくことになる。温度が4×10^9 Kを超えると、熱運動による衝突の衝撃が核力の引力に勝るようになり、それまでの進化の過程で合成された鉄の原子核の分解が始まる。このような相変化が起きると、恒星はもはや力学的な釣り合いを維持できなくなり、動力学的に不安定なる。したがって、鉄の分解が始まると、恒星は動力学的に不安定になり、重力崩壊を始め、中心部は高温高密度になる。この後の進化は、恒星の質量によって決まる。密度が大きくなって、核子同士の間に斥力が働くようになると、崩壊が止まって反跳が起き、衝撃波が起ち、内部から放出されるニュートリノによって熱ためられ、外層が吹き飛ばされることになる。これが、II型超新星の機構と考えられているが、未だ、球対称の超新星爆発のsimulationでこの爆発を再現した例はなし。初期の質量が比較的に軽い（太陽の約30倍以下）場合は、中心領域が中性子星として残り、それより重い恒星の場合は、残った中心核の重力を支えることができず、そのまま崩壊をつづけ、ブラック・ホールの形成に至ると考えられている。

太陽質量の数百倍を越える恒星の場合は、中心部で電子対の発生によって重力崩壊が引き起こされことになる。この電子対超新星爆発の場合も、結果は質量に依存し、比較的軽いものは中心部での核反応で反跳が起き恒星全体が吹き飛ばされるが、思いものの場合は、反跳が起きるのが遅れて中心部が高密度になるため、そのままつぶれてブラック・ホールになる。

8.1.4 進化の観測的な特徴

これまでは内部構造の変化に着目して恒星の進化を見てきたが、この節では、進化に伴う恒星の外観の変化とその観測的な特徴をまとめておこう。

主系列 — 高光度の青白い星から低光度の赤い星
水素燃焼段階の恒星は、質量が違っても中心温度はあまり変わらないので、半径は質量にほぼ比例する。密度は質量の２乗に逆比例するので、質量の大きな恒星ほど、密度が小さい。その結果、ガスの圧力（ρTに比例）に比べて輻射の圧力（T^4に比例）の寄与が大きくなり、その輻射の流れである星の光度も大きくなる。光度はもっとも軽い恒星（太陽質量の0.08倍）では$\sim 10^{-4}L_\odot$と暗い。一方、質量が増加すると光度が大きくなるが、明るい方については輻射圧が重力を超えられないという条件が課せられる光度の上限値、エディングトン限界$[L_{\rm edd} = 3.7\times10^4(M/M_\odot)L_\odot]$に接近、$M = 100M_\odot$では光度は$10^6L_\odot$を越える。質量がこれ以上になると、輻射圧によって、脈動不安定とそれに伴う低質量放出が強化され、恒星の質量が減少し、あるいは、恒星の形成そのもの

が妨げられると考えられている。これが観測される恒星の質量と光度の上限を決める。

この範囲が観測される恒星に対応する。恒星の表面温度 $T_{\rm eff}(L = 4\pi R^2 T_{\rm eff})$ は質量とともに増加し、水素燃焼段階の恒星は、ＨＲ図上で左上から右下へ線状に並び、主系列を形成することになる。太陽は、表面温度が絶対温度約5700度で黄色く、ほぼ中央に位置するが、大質量の星は、明るく左上に位置し、表面温度が高くて青白く輝き、低質量の星は、暗く右下で、表面温度も低くて赤い色をしている。

後期の進化 — 外層の膨張と光度の上昇

水素燃焼の段階以降になると、恒星の構造変化は複雑になり、質量によって大きく違ってくる。水素燃焼が進み、中心部でヘリウムが増えると、平均分子量が増加し半径は膨れる。中心で水素が燃え尽き、水素殻燃焼が始まると、膨張はさらに加速される。殻燃焼に対しても、「負の比熱」の自動制御機構が働くため、燃焼殻の温度はほぼ一定に保たれので、燃焼殻の半径もそれほど変化できない。したがって、中心核が重力収縮し、中心部の密度が上昇すると、周辺の燃焼殻では密度が下がることになり圧力も減少するので、この小さな圧力で外層を支えるために、外層を膨張させてその重みを減らすという調整が働く。

外層の膨張のため表面温度が下がり、恒星は赤色巨星分枝へ向かって進化する。恒星進化の数値計算でもとめた低質量星のＨＲ図上での振舞い示すと図４のようになる。

太陽質量の2.5倍より軽い低質量星は、ヘリウム中心核の重力収縮の段階で赤色巨星分枝に到達し、中心核で電子が縮退する。その後、水素殻燃焼で中心核の質量が増加するとともに、明るくなり、赤色巨星分枝を上り、中心核の質量が太陽のほぼ半分、光度が約 $3000L_\odot$ になったとき、ヘリウム殻燃焼に点火する。しかしながら、$M \lesssim 0.6 M_\odot$ 以下の場合は、質量放出によってヘリウム燃焼に点火前に外層を失って進化を終えることになる。外層の質量が減少してその広がりを維持できなくなると、半径が縮み始め、恒星は、ＨＲ図上で、漸近巨星分枝を離れ左へ横断する。やがて殻燃焼が消えると光度、表面温度ともさがってヘリウムの白色矮星になる。

一方ヘリウム燃焼に点火した場合は、中心核は膨張し、その結果、水素殻燃焼が弱まり光度は減少、恒星の半径は収縮する。軽い恒星の場合には、半径が小さく、ＨＲ図上で、赤色分枝を離れて青い方に位置し、水平分枝を形成する。これに対し、水素外層の質量が大きいと、ヘリウム燃焼段階のＨＲ図上の位置は、赤色巨星分枝に重なる。これは red crump 星として観測される。中心部でヘリウムが燃え尽き、炭素と酸素の中心核ができて、その周囲で水素とヘリウムの2重殻燃焼が起きるようになると、再び、中心核で電子が縮退、恒星は、半径、光度を増しつつ、赤色巨星分枝の上端に近づき、その上方に漸近巨星分枝を形成する。光度の増加とともに質量放出率も増加し、やがて、外層の質量が減少すると、漸近巨星分枝を離れ、左へと横断し、ついには、殻燃焼も消え、炭素と酸素の白色矮星へと冷却していく。

白色矮星への冷却過程では、恒星の半径は縮退した中心核の半径とほぼ等しく、半径一定の線に沿って冷却してゆく。表面温度が高く光度が大きい間は、冷却に要する時間が短く観測にかかり難いので、観測される白色矮星は、暗くなり進化の速度が遅くなった段階のものが多くなる。

太陽質量の約８倍までの中質量星では、中心で水素燃焼後の重力収縮の段階で、ＨＲ図を横断し赤色巨星分枝に達するが、電子縮退を経ることなく、ヘリウム核燃焼が始まる。ヘリウム燃焼中は、半径が収縮して表面温度が上昇、中心でのヘリウム燃焼段階は、主系列星と平行な第2の分枝を形成することになる。中心でのヘリウム燃焼を終え、炭素と酸素の中心核が形成されると、低質量星の場合と同様、漸近巨星分枝に達し、光度が増加していく。中質量星の大部分は、低質量星と同じく、漸近分枝途上で、質量放出で外層を失い、殻燃焼が消えて、そのまま冷えて白色矮星となる。もし中心核が Chandrasekhar 臨界質量近くまで成長できた場合は、漸近巨星分枝上で炭素燃焼点火し超新星爆発を起こす。

太陽の11倍までの恒星は、炭素燃焼の後、酸素、ネオン、マグネシウム中心核が形成された段階で、中心核で電子縮退が起き、漸近巨星分枝を上っていく。その途上でネオンの電子捕獲が起こり、電子の数が減り、そのためChandrasekhar臨界質量が減少して中心核の質量以下になる。このため、中心核の重力を支えられなくなり、重力崩壊が始まり超新星爆発が誘起される。太陽質量の12倍以上の恒星では、質量の小さいほうは、ヘリウム燃焼を終える前に、赤色巨星分枝に達するが、質量の大きい恒星は、主系列と赤色巨星分枝の中間にとどまる。炭素燃焼以降になると、中心部が高密度になりニュートリノによるエネルギー損失により進化は加速されるので、表面の変化を伴わず、中心部のみ進化して超新星爆発に至る。

超新星爆発ではその光度は太陽の一億倍以上にも達し爆発時の高温高密度で合成された鉄を中心とする多種多様な元素が放出される。また、重力崩壊型の超新星爆発では大量のニュートリノも放出される。1987年のマゼラン星雲の超新星爆発で、はじめて、このニュートリノが観測された。

9 恒星の進化＝天体の探査手段

これまで見てきたように、恒星は、誕生から進化の過程を通して宇宙に光と重元素を放出し、自ら質量の一部は白色矮星、中性子星、ブラックホール等の重力点源となって残る。われわれの宇宙で最初に誕生した恒星は、その光で残余のガスを熱してイオン化し、その後の宇宙の進化に影響を与えたと考えられている。また、恒星から放出された重元素は宇宙の物質を多種多様な元素で豊富化してきた。さまざまな天体に属する恒星に、恒星進化の計算結果を適用すれば、その天体の年齢や進化についての情報を得ることができる。

9.1 天体の年齢の推定

恒星の寿命は質量によって異なるので、さまざまな天体の年齢の推定が可能である。ガス雲中で恒星が誕生するとき、さまざまな質量のものがほぼ同時にできると考えられている。これらの恒星のうち、質量の大きいものから順に主系列をはなれていく。したがって、主系列を離れたもっとも質量の小さな恒星、あるいは、主系列に残っているもっとも明るい恒星がわかれば、それらの恒星の寿命は、天体で恒星が形成されてから現在までの時間、すなわち、天体の年齢の下限値を与える。

数十万個の恒星が密集した球状星団は、重元素量が太陽の1/300～1/4と小さく、銀河系の中では、もっとも古い天体と考えられている。この星団のHR図と、恒星進化の数値計算からさまざまな質量の恒星が誕生してからある時間を経過した後にＨＲ図に占める位置を求めた同時刻軌跡との比較から年齢を推定することができる。図22に、球状星団M15の場合についていくつかの年齢に対する同時刻軌跡を実線で示したが、これと観測したＨＲ図との比較からは、この星団の恒星が誕生してからの年齢を100～150億年の範囲に推定することができる。他の球状星団についてもほぼ同様の年齢が求められていて、この推定値は、宇宙年齢の下限値を与えるもので、ハッブルの膨張則から求めた年齢とともに、現在の宇宙論の基礎となっている。

9.2 宇宙の元素の起源

恒星の重要な機能の一つは、宇宙における元素の製造工場としての役割である。実際、note.3で扱った元素は、われわれの周りにあふれているものと一致している。これらは主要なエネルギー供給源となる核反応であるが、これら以外にもさまざまな元素が関与する核反応も起きる。特に、超新星爆発のときには、非常な高温、高密度が実現し、多種類の元素が合成される。こうして合成された元素の一部が、質量放出や超新星爆発によって、星間空間に撒き散らされ、宇宙の物質を重元素で汚染してきたことになる。事実、恒星の重元素の含有量には大きな違いが観測される。太陽を含めて銀河円盤内の多くの恒星は、炭素以上の重元素を2%程度含んでいるが、上にあげた球状星団など銀河ハローの恒星は、重元素の含有量が１０分の１から１００分の１と少ない。前者は種族I、後者は種族IIの天体として識別されている。

現在の標準的な宇宙論では、核反応に必要な高温高密度は宇宙膨張のごく初期と恒星内部に限られる。前者は時間が短く、ヘリウムやリチウムなどの軽元素しか合成できないため、現在われわれの宇宙に存在する炭素以上の元素はすべて恒星内部で形成されたものと考えられている。太陽系の重元素も、かって恒星から放出されて、46億年前の原始太陽系星雲の形成時に混入したものである。われわれの体を構成する原子も、一度ならず恒星内部

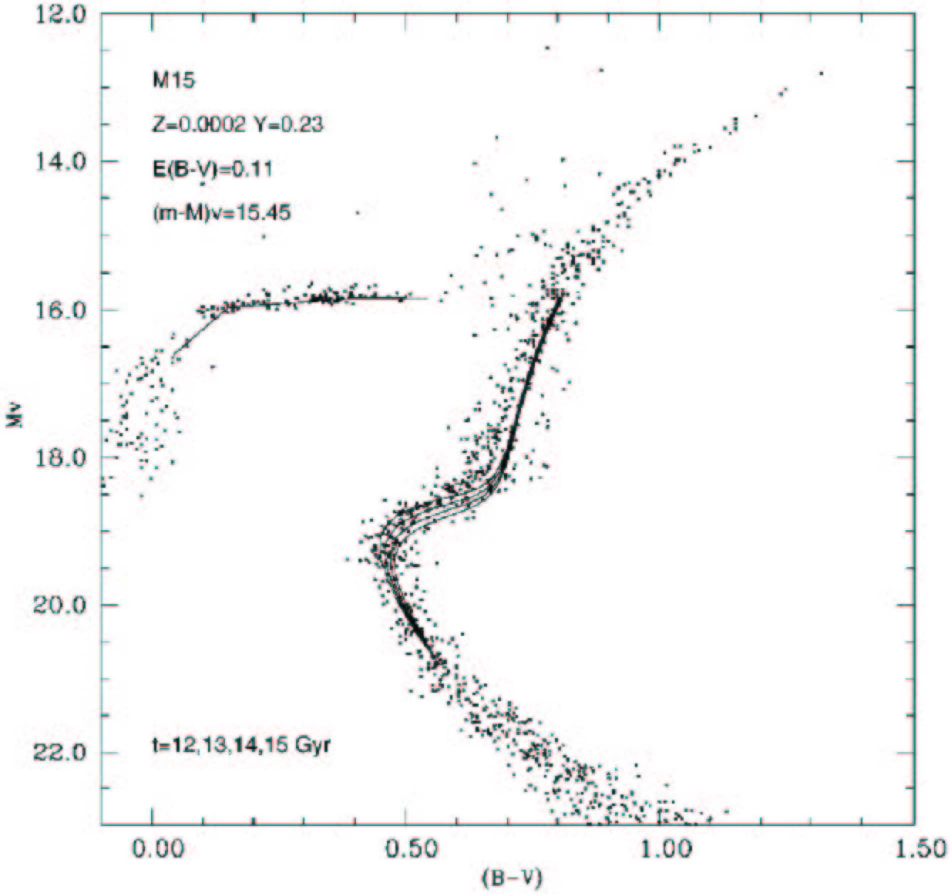

図22. 球状星団M15のHR図と恒星進化の同時刻曲線との比較 (Salaris, Innocent, &Weiss 1987 ApJ)。

の高温度、高密度をくぐりぬけてきたことになる。

合成される元素は恒星によって特徴が異なるので、観測される重元素の分布から元素のルーツをたどり、どのような恒星が形成されてきたという歴史を探ることが可能である。例えば、超新星爆発のモデル計算で、大質量星を母星とするII型超新星は、降着白色矮星を母星とするIa型超新星と比べると、放出物質中で鉄に対して酸素、マグネシウムなどのα元素が多いことが知られているが、実際、球状星団、銀河ハローの金属欠乏星からは、太陽などの種族Iの恒星と比べて[O]/Feが0.4 dex程度小さくなっていることが観測されている。これは、銀河の化学進化で2つの型の超新星爆発に時間差があったことを示唆している。

重元素量の含有量が少ない恒星は古いということになるが、特に、われわれの宇宙最初の恒星は炭素以上の重元素をまったく含んでいなかったはずである。そのうち、太陽質量の0.8倍以下の恒星であれば、寿命が長く現在でも核燃焼段階に留まっているので、これらのごく初期の恒星の生き残りを発見できれば、誕生当時の宇宙の物理状態、銀河の形成過程についての情報が得られるであろう。

1990年代以降Beers et al. (1992)によるHK survey、2000以降になるとChristlieb et al. (2001)によるHamburg/ESO surveyの結果、銀河ハローでの重元素量の少ない恒星が多数見出されている。図22に両surveyで(2005年までに)見出された金属欠乏星の金属量の分布を示した。Feの組成が太陽の1000分の1位以下

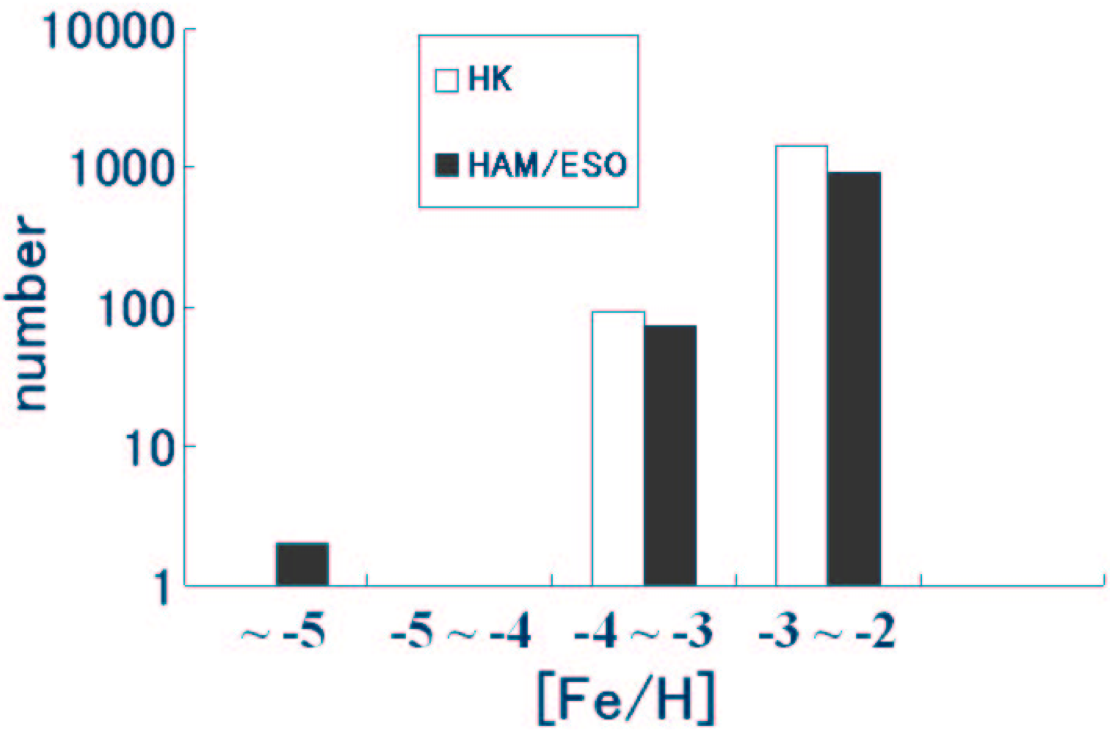

図23. HK surveyとHamburg/ESO surveyで発見された銀河ハローの金属欠乏星の数分布 (Beers & Christlieb 2005 Ann Rev Astron Astrophys)。

のものも100個程度発見されているが、金属量の減少とともにその数は急速に小さくなる。鉄の金属量が太陽の3000分の1以下では、10個程度しか見出されていない。しかもこれらの恒星の組成分布は、太陽や球状星団などの種族IやII星と比べると大きく異なっているのが特徴である。例えば、酸素よりも炭素の組成が大きい炭素星の割合が桁違いに大きいとか、あるいは、Baなどの中性子捕獲でできたと考えられている重元素の組成が星毎に大きく変動するなどが観測されている。

また、現在までに金属量が太陽の1万分の1と10万分の1の間には一個も発見されていないにもかかわらず、10万分の1以下の恒星が2個発見されているなど特異な傾向が見出されている。これらの最も重元素量の少ないものは、それぞれ太陽の200,000分の1および25,000分の1の2個であるが、これらの恒星は図23に示したように炭素の組成が極端に多いなどの特異な組成を示している(2007年に～1/60000に一個発見されたが、この恒星も炭素が多い)。この重元素のルーツに関しては、もともと誕生時からもっていたものか、あるいは、誕生後の金属を含んだ星間ガスを降着したための汚染によるものかについて議論のあるところである。これは宇宙最初の恒星がどのようなものであったか—大質量星しかできなかったのか、あるいは、現在まで核燃焼星として生き延びている低質量星ができたのか—等宇宙初期の構造形成にも関係する。初期にできた恒星は、種族Iや種族IIの恒星に比べても銀河系円盤より遠く離れた場所に分布し、暗いと予想され、その発見は今後「すばる望遠鏡」など大型の望遠鏡による研究の格好の課題である。

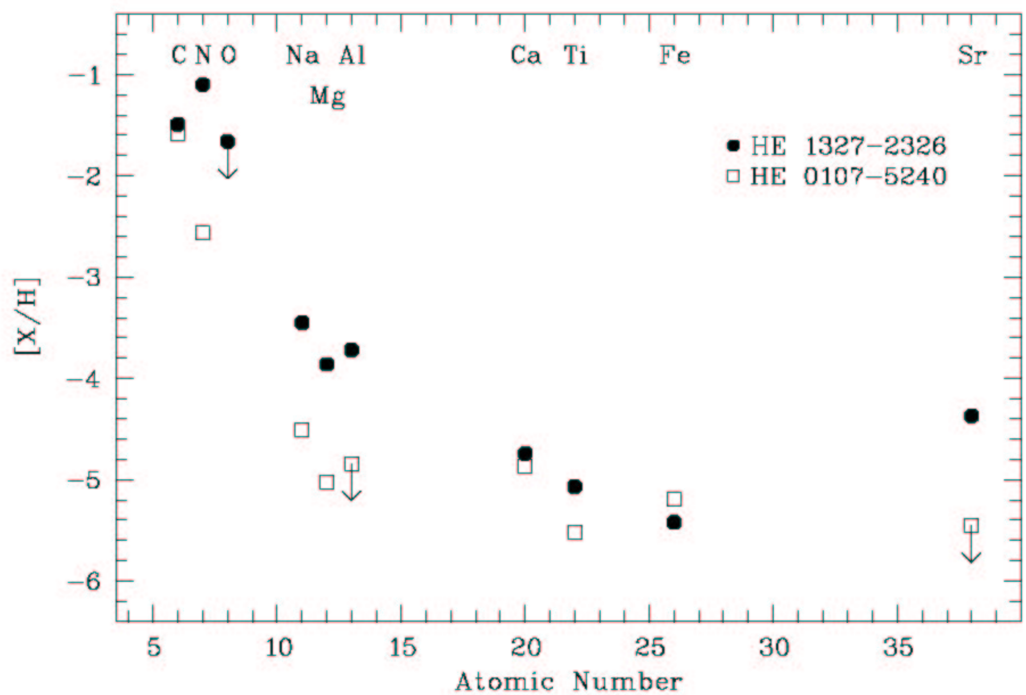

図24. これまでに発見された最も鉄の組成が最も小さい恒星の組成分布。太陽組成との比較したもので、炭素の組成は鉄に比べると1万倍近く大きくなっている、また、N、Na、Mgが増強されているなど共通点はあるが、Srの組成などでは違いが認められる (Frebel et al. 2005 Nature)。